

弾性横桁で支持された床版の断面力式

仙台支店・設計部 高橋眞太郎、本社・顧問 倉方慶夫、元本社・顧問 高尾孝二

〔要旨〕

橋梁形式は、公共事業費抑制の要求を受けてコスト縮減を図ることができる合理化形式の採用が多くなっている。この流れを受けて鈹桁形式では少数鈹桁橋の採用が多くなっている。この形式はおよそ 20 年前に、日本道路公団が欧州の少数鈹桁橋を参考に P C 床版を有する少数鈹桁橋の検討を始め、今では 2 主鈹桁橋が NEXCO の基本形式となっている。

少数鈹桁橋、特に 2 主鈹桁橋の床版形式は、P C 床版をはじめ多くの種類の合成床版が採用されているが、それらは主桁が床版を支持する形式である。当社では、床版を比較的密に配置した横桁で支持し、床版の支間方向を橋軸方向とした「縦置きグレーチング床版」を提案している。この形式の床版では、支持桁である横桁の不等沈下の影響を考慮する必要があるが、道示や便覧などの「床版の支間方向が車両進行方向に平行な場合」の設計曲げモーメント式ではこの影響が考慮されていない。

本報告は、横桁で支持された床版の支間方向が車両進行方向に平行な場合の、横桁の不等沈下の影響を考慮した床版の作用断面力を求めることを目的としている。検討は、直交異方性版の基本式を基に、横桁の不等沈下の影響を考慮した曲げモーメント・ねじりモーメント・せん断力の解析式を誘導したものである。

目 次

§1 はじめに	1
§2 直交異方性版基本式による応用	2
2-1 直交異方性版の基本式	2
2-2 相対する 2 辺が単純支持された無限帯状版	5
§3 弾性横桁で支持された無限帯状版	9
3-1 不静定反力の計算	9
3-2 曲げモーメントの計算	12
3-3 ねじりモーメントの計算	14
3-4 せん断力の計算	18
3-5 弾性支持桁のたわみと断面力	25
§4 参考文献	26

§ 1 はじめに

R C床版の設計曲げモーメント式は道路橋示方書（以下、道示）及び鋼道路橋設計便覧（以下、便覧）に、等方性版を対象にして「床版の支間方向が車両進行方向に直角の場合」と、「床版の支間方向が車両進行方向に平行の場合」が示されている。I形鋼格子床版の設計曲げモーメント式は、便覧に床版の異方性を考慮した式が両方向の床版支間方向に対して示されている。

床版を支持する桁の不等沈下の影響を考慮する必要がある場合には、道示巻末付録に「付加曲げモーメント算定図表」が示されており、支持桁の剛度差等から算定した付加曲げモーメントを考慮して設計曲げモーメントを算定している。この算定方法は縦桁を有する箱桁橋のR C床版などのように、支間方向が車両進行方向に直角の場合を対象としたものである。

一方、最近の傾向としてコスト削減の観点から2主桁桁橋の採用事例が多くなっている。使用される床版形式として、NEXCOで採用されているP C床版や、各橋梁メーカーが開発した合成床版の採用事例が多い。これら床版は主桁で支持する形式であり、橋軸直角方向を支間方向としている。この形式では、床版の設計曲げモーメント式の適用範囲の関係から多くの場合最大床版支間長を6mとしているため、幅員が広い場合には主桁本数を3本に増やす必要があり、コスト削減の効果が低減することとなる。

これらの問題点を解決する方法として、床版を主桁で支持するのではなく、比較的密に配置した横桁で支持することによって、主桁間隔が6m以上となる広幅員の橋梁に対しても2主桁で対応することが可能となる。横桁で支持する床版の作用曲げモーメントには、横桁の変形すなわち沈下の影響を考慮する必要がある。しかし、道示あるいは便覧で示されている「床版の支間方向が車両進行方向に平行の場合」の算定式には、横桁の沈下の影響が考慮されておらず、その影響を把握する必要がある。

本稿は、床版を横桁で支持する形式を対象とし、横桁の沈下の影響を考慮した解析式を誘導することを目的としている。道示や便覧で示されている設計曲げモーメント式は、FEM解析結果を基に整理したものである。誘導に際しては直交異方性版の基本式を基に、支持条件として相対する2辺が単純支持された無限帯状版を基本形とし、横桁からの反力を不静定反力として取り扱っている。解析式を誘導することにより、主桁・横桁間隔や床版厚などの基本条件の変更に対しても、正確に床版の作用曲げモーメントを得ることができ、設計計算に適用することが可能になる。

§2 直交異方性版基本式による応用

2-1 直交異方性版の基本式

座標軸の方向に主軸を有する直交異方性版を考える。直交異方性版の基本式は

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (1)$$

で表される。但し、

w	版のたわみ	
B_1	版の x 方向曲げ剛性	$B_1 = EJ_1 / (1 - \nu_1^2)$
B_2	版の y 方向曲げ剛性	$B_2 = EJ_2 / (1 - \nu_2^2)$
H	版の振り剛性	$2H = \nu_2 B_1 + \nu_1 B_2 + 4C$
		$C = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \sqrt{B_1 B_2}$

- EJ_1 x 軸方向の版の単位幅当たり曲げ剛性
- EJ_2 y 軸方向の版の単位幅当たり曲げ剛性
- ν_1, ν_2 それぞれ x 軸方向及び y 軸方向のポアソン比
- p 鉛直方向単位面積当たりの荷重強度

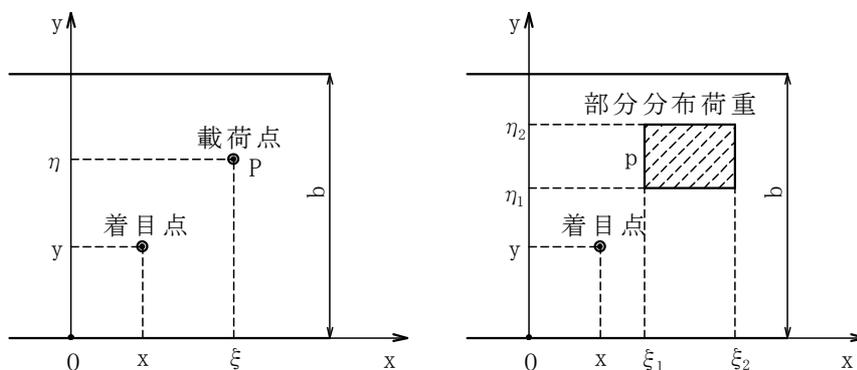


図-1、2

さて、振り剛性 $2H$ に C を代入すれば、

$$\begin{aligned} 2H &= \nu_2 B_1 + \nu_1 B_2 + 4C \\ &= (\sqrt{\nu_2 B_1})^2 + (\sqrt{\nu_1 B_2})^2 + 4 \left\{ \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \sqrt{B_1 B_2} \right\} \\ &= 2\sqrt{B_1 B_2} + (\sqrt{\nu_1 B_2})^2 + (\sqrt{\nu_2 B_1})^2 - 2\sqrt{\nu_1 B_2} \sqrt{\nu_2 B_1} \\ &= 2\sqrt{B_1 B_2} + (\sqrt{\nu_2 B_1} - \sqrt{\nu_1 B_2})^2 \end{aligned}$$

となり、右辺第2項は一般に影響が小さいのでこれを無視し、版の基本式を次式のよ
うに表すことにする。このような簡略化により基本式が積分可能になる。

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{B_1 B_2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad (2)$$

また、 x 軸方向及び y 軸方向のポアソン比を等しくすれば、即ち $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ とすれば、版の曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M_x = -B_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -B_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3-1)$$

上式は

$$g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2} \nabla^2 w$$

とにおいて、

$$M_x = -B_1 \left\{ 2g - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}, \quad M_y = -B_2 \left\{ 2\nu g + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (3-2)$$

と変形される。

また、ねじりモーメントは *H.Olsen* の式から

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\sqrt{B_1 B_2} \left[1 - \frac{\nu}{2} \left(\sqrt{\frac{B_1}{B_2}} + \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \kappa &= \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}, \quad \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \\ M_{xy} &= -\sqrt{B_1 B_2} \left[1 - \frac{(1+\kappa^2)\nu}{2\kappa} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3-3)$$

せん断力は同様に、

$$\begin{aligned} Q_x &= -B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left\{ \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} + \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ &= -B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left\{ \kappa + \frac{\nu}{2} (1 - \kappa^2) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2g - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_1 &= \kappa + \frac{\nu}{2} (1 - \kappa^2) \\ Q_x &= -B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[2g - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ &= -B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[2g + (k_1 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ &= -B_1 \left[2 \frac{\partial g}{\partial x} + (k_1 - 1) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned}
Q_y &= -B_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left\{ \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} + \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{B_1}{B_2} \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
&= -B_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left\{ \frac{1}{\kappa} + \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
k_2 &= \frac{1}{\kappa} + \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \\
Q_y &= -B_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \left(2g - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\
&= -B_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[2k_2 g + (1 - k_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
&= -B_2 \left[2k_2 \frac{\partial g}{\partial y} + (1 - k_2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]
\end{aligned} \tag{3-5}$$

図-1において、集中荷重 P が y 軸上、即ち、点 $(0, \eta)$ にある場合を考え、同次解を

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \exp(\varphi_n x) \sin \beta_n y, \quad \beta_n = \frac{n}{b} \pi$$

と仮定して、式(1)の同次式に代入すれば、

$$\begin{aligned}
\varphi_n^4 - 2\sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \varphi_n^2 \beta_n^2 + \frac{B_2}{B_1} \beta_n^4 &= 0, & \left(\varphi_n^2 - \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \beta_n^2 \right)^2 &= 0 \\
\varphi_n &= \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}} \beta_n
\end{aligned}$$

従って、式(1)の一般解は

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \exp(\varphi_n x) + B_n \exp(-\varphi_n x) + C_n \varphi_n x \exp(\varphi_n x) + D_n \varphi_n x \exp(-\varphi_n x) \right] \sin \beta_n y$$

2-2 相対する 2 辺が単純支持された無限帯状版

無限帯状版の場合の境界条件は次式で与えられる:

$$(i) \quad x=0: \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad q_x = -\frac{P}{2}$$

$$(ii) \quad x=\pm\infty: \quad w = 0$$

但し、 p は y 軸上の集中荷重 P を y 方向に展開したもので次式で表される。

$$p = \frac{2P}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y$$

境界条件(ii)より、 $A_n = C_n = 0$ となるから

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + D_n \varphi_n x) \exp(-\varphi_n x) \sin \beta_n y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \varphi_n + D_n \varphi_n - D_n \varphi_n^2 x) \exp(-\varphi_n x) \sin \beta_n y$$

境界条件(i)の第 1 条件より $B_n = D_n$ 、従って、

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (1 + \varphi_n x) \exp(-\varphi_n x) \sin \beta_n y$$

上式を微分してせん断力 q_x の式に代入し、境界条件(i)の第 2 条件を適用すれば、

$$B_1 \cdot 2B_1 \varphi_1^3 = \frac{P}{b} \sin \beta_1 \eta, \quad B_n = \frac{P}{2bB_1 \varphi_n^3} \sin \beta_n \eta$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{2bB_1 \varphi_n^3} (1 + \varphi_n x) \exp(-\varphi_n x) \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y$$

荷重 P が任意の点 (ξ, η) にある時は、座標の原点を x 方向に $-\xi$ だけ移動して、

$$w = \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^3} (1 + \varphi_n |x - \xi|) \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y$$

$$w = \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \quad (4)$$

ここに、

$$\Omega(x, \xi) = \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|)$$

$$\varphi_n = \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}} \cdot \beta_n, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

ここで、(4)式の 2 階の偏微分は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^3} \frac{\partial^2 \Omega(x, \xi)}{\partial x^2} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^3} \frac{\partial^2 \Omega(x, \xi)}{\partial x^2} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y - \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \right) \\ &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \frac{1}{2\varphi_n^2} \left(\beta_n^2 \Omega(x, \xi) - \frac{\partial^2 \Omega(x, \xi)}{\partial x^2} \right) \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \end{aligned}$$

よって、式 (4) のラプラスアンは

$$g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2} \nabla^2 w = -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, \xi)}{\varphi_n} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \quad (5)$$

但し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x} &= -\varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|) + \varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \\ &= -\varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (\varphi_n |x - \xi|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega(x, \xi)}{\partial x^2} &= -\varphi_n \left\{ -\varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (\varphi_n |x - \xi|) + \varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \right\} \\ &= -\varphi_n^2 \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \{1 - \varphi_n |x - \xi|\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{1}{2\varphi_n^2} \left(\beta_n^2 \Omega(x, \xi) - \frac{\partial^2 \Omega(x, \xi)}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\varphi_n^2} \left(\beta_n^2 \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|) + \varphi_n^2 \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 - \varphi_n |x - \xi|) \right) \\ &= \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \left\{ \frac{\beta_n^2}{2\varphi_n^2} (1 + \varphi_n |x - \xi|) + \frac{1}{2} (1 - \varphi_n |x - \xi|) \right\} \\ &= \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \left\{ \frac{\beta_n^2}{2\varphi_n^2} (1 + \varphi_n |x - \xi|) - \frac{1}{2} (1 + \varphi_n |x - \xi|) + 1 \right\} \\ &= \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - \xi|) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\kappa = \frac{\varphi_n^2}{\beta_n^2} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}$$

次に、図-2 に示すように、 $\xi = \xi_1 \sim \xi_2$ 、 $\eta = \eta_1 \sim \eta_2$ の矩形領域に作用する部分等分布荷重を考える。式 (4) において集中荷重 P に $P = pd\xi d\eta$ を代入して荷重領域内で積分すれば、たわみ w が以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
w &= \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \\
&= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{pd\xi d\eta}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \\
&= \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^4} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y
\end{aligned} \tag{7}$$

但し、 $J_n(x, \xi_1, \xi_2)$ は $\Omega(x, \xi)$ を荷重領域内で積分した値であり次のように表される。

i) 着目点の x 座標が荷重領域の外側にある場合、即ち、 $x < \xi_1$ 、 $x > \xi_2$ ($\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$)

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(x, \xi) d\xi &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|) d\xi \\
&= \left| \left[-\frac{1}{\varphi_n} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (2 + \varphi_n |x - \xi|) \right]_{\xi_1}^{\xi_2} \right| \\
&= \frac{1}{\varphi_n} \left| \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) (2 + \varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) (2 + \varphi_n |x - \xi_2|) \right| \\
&\equiv \frac{1}{\varphi_n} J_n(x, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{8}$$

ii) 着目点の x 座標が荷重領域の内側にある場合、即ち、 $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ ($\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$)

積分区間を $\xi_1 \sim x$ 及び $x \sim \xi_2$ に分けて、

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(x, \xi) d\xi &= \int_{\xi_1}^x \Omega(x, \xi) d\xi + \int_x^{\xi_2} \Omega(x, \xi) d\xi \\
&= \left| \left[-\frac{1}{\varphi_n} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (2 + \varphi_n |x - \xi|) \right]_{\xi_1}^x \right| \\
&\quad + \left| \left[-\frac{1}{\varphi_n} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (2 + \varphi_n |x - \xi|) \right]_x^{\xi_2} \right| \\
&= \frac{1}{\varphi_n} \left| 4 - \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) (2 + \varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) (2 + \varphi_n |x - \xi_2|) \right| \\
&\equiv \frac{1}{\varphi_n} J_n(x, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{9}$$

また、

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \sin \beta_n \eta d\eta = -\frac{1}{\beta_n} (\cos \beta_n \eta_2 - \cos \beta_n \eta_1)$$

次に部分等分布荷重によるたわみのラプラスアンは、式 (7) を直接微分するよりも式 (5) を領域内で積分するのがよい。即ち、

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) d\xi \\
&= \frac{1}{\varphi_n} \left| \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right| \quad (x < \xi_1, \xi_2 < x) \\
&= \frac{1}{\varphi_n} \left| 2 - \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right| \quad (\xi_1 < x < \xi_2) \\
&\equiv \frac{1}{\varphi_n} I_n(x, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{10}$$

と置けば、

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_1}^{\xi_2} G(x, \xi) d\xi &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - \xi|) \right\} d\xi \\
&= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) d\xi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|) d\xi \\
&\text{第2項は式(8)、(9)より } J_n(x, \xi_1, \xi_2) \text{であるから} \\
&= \frac{1}{\varphi_n} I_n(x, \xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{1}{\varphi_n} J_n(x, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{2} \nabla^2 w \\
&= - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{p d\xi d\eta}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, \xi)}{\varphi_n} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \\
&= - \frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^2} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{但し、} \quad L_n(x, \xi_1, \xi_2) = I_n(x, \xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) J_n(x, \xi_1, \xi_2) \tag{12}$$

§3 弾性横桁で支持された無限帯状版

3-1 不静定反力の計算

次に、集中荷重又は部分等分布荷重が作用する直交異方性無限帯状版が、 y 軸に平行な弾性横桁で支持されている場合を考える。版は弾性支持桁によってピン支持されているものと仮定する。即ち、版と支持桁の間には弾性支持桁の方向に分布する鉛直方向の分布力(未知反力)のみが作用するものとし、これを次のような無限級数で表す。

$$q_i = \sum_{n=1}^{\infty} q_{in} \sin \beta_n y \quad (21)$$

但し、 q_i は作用荷重により $x = a_i$ の位置における支持桁に生ずる y 方向に分布する未知分布反力である。

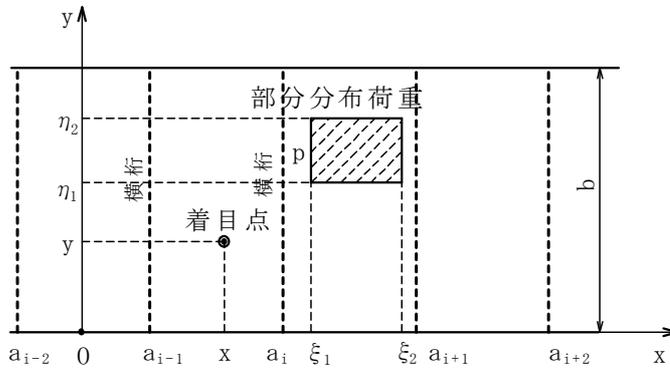


図-3

さて、この分布反力 q_i による版の任意点のたわみ $w_i(x,y)$ は式(4)において $P = q_i d\eta$ とおいて0から b まで積分すれば、

$$w_i = - \int_0^b \frac{q_{in} \sin \beta_n \eta d\eta}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \quad (22)$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin^2 \beta_n \eta d\eta &= \int_0^b \frac{1 - \cos 2\beta_n \eta}{2} d\eta \\ &= \left[\frac{1}{2} \eta - \frac{b}{4n\pi} \sin 2\frac{n\pi}{b} \eta \right]_0^b \\ &= \left(\frac{1}{2} b - \frac{b}{4n\pi} \sin 2n\pi \right) - (0 - 0) = \frac{1}{2} b \end{aligned}$$

よって分布反力 q_i による版の任意点のたわみ $w_i(x,y)$ は

$$w_i = - \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega(x, \xi) \frac{q_{in}}{\varphi_n^3} \sin \beta_n y$$

となる。但し、 q_i は版に対する反力であるから上向きを正と定義して、式(22)に負号を付けた。

支持桁がない場合の作用荷重による版のたわみを新たに $w_0(x,y)$ と書くことにすれば、支持桁の分布反力の影響をも含めた全たわみ $w(x,y)$ は

$$w = w_0 + \sum_{i=1}^r w_i \quad (23)$$

と表される。但し、 r は弾性支持桁の総数である。

先の仮定により、支持桁の位置では版のたわみと支持桁のたわみは等しくなければならないから、支持桁 i に関し、

$$\left[EI_i \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} = \sum_{m=1}^{\infty} q_{im} \sin \beta_m y$$

が成り立つ。上式の両辺に $\sin \beta_n y$ を乗じて 0 から b まで積分すれば、

$$\int_0^b \left[EI_i \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} \sin \beta_n y dy = \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} q_{im} \sin \beta_m y \cdot \sin \beta_n y dy = q_{in} \frac{b}{2} \quad (24)$$

となる。式 (23) より式 (4) と式 (22) を代入して、集中荷重に対して

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} &= \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} + \sum_{i=1}^r \left[\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} \\ &= \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^3} \Omega(a_i, \xi) \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y - \frac{1}{4B_1} \sum_{j=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^3} \Omega(a_i, a_j) q_{jn} \sin \beta_n y \end{aligned}$$

となるから、これを式 (24) に代入すれば、

$$\int_0^b \left[EI_i \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^3} \Omega(a_i, \xi) \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y - EI_i \frac{1}{4B_1} \sum_{j=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^3} \Omega(a_i, a_j) q_{jn} \sin \beta_n y \right]_{x=a_i} \sin \beta_n y dy = q_{in} \frac{b}{2}$$

となり、 q_i の各項ごとに

$$\begin{aligned} EI_i \frac{P}{2bB_1} \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^3} \Omega(a_i, \xi) \sin \beta_n \eta \frac{b}{2} - EI_i \frac{1}{4B_1} \sum_{j=1}^r \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^3} \Omega(a_i, a_j) q_{jn} \frac{b}{2} &= q_{in} \frac{b}{2} \\ \frac{B_1}{EI_i} \cdot \frac{4\varphi_n^3}{\beta_n^4} q_{in} + \sum_{j=1}^r \Omega(a_i, a_j) q_{jn} &= \frac{2P}{b} \Omega(a_i, \xi) \sin \beta_n \eta \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる。また、部分等分布荷重に対しては、式 (7) と式 (22) から

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} &= \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} + \sum_{i=1}^r \left[\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} \right]_{x=a_i} \\ &= \frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^4} \frac{J_n(x, \xi_1, \xi_2) \cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y - \frac{1}{4B_1} \sum_{j=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^4}{\varphi_n^3} \Omega(a_i, a_j) q_{jn} \sin \beta_n y \end{aligned}$$

となり、同様に式 (24) に代入して

$$\frac{B_1}{EI_i} \cdot \frac{4\varphi_n^3}{\beta_n^4} q_{in} + \sum_{j=1}^r \Omega(a_i, a_j) q_{jn} = \frac{2p}{b} \frac{J_n(a_i, \xi_1, \xi_2) \cdot \cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\varphi_n \beta_n} \quad (26)$$

となる。式 (25) 又は (26) より係数 q_{in} が求めれば、弾性支持桁の分布反力が無限級数として決定されるので、版、及び支持桁のたわみと断面力が求められる。

版に載荷された荷重と弾性支持桁からの反力（不静定力）によるたわみは集中荷重に対して、式 (4) と式 (22) から

$$\begin{aligned}
 w &= w_0 + \sum_{i=1}^r w_i \\
 &= \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y - \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \sin \beta_n y
 \end{aligned} \tag{27}$$

部分等分布荷重に対しては、式 (7) と式 (22) から

$$\begin{aligned}
 w &= w_0 + \sum_{i=1}^r w_i \\
 &= \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^4} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y - \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \sin \beta_n y
 \end{aligned} \tag{28}$$

3-2 曲げモーメントの計算

次に、弾性支持桁からの反力（不静定力） q_i によるたわみのラプラスアン g_i は、式（5）において $P = q_i d\eta$ とおいて 0 から b まで積分すれば、

$$\begin{aligned}
 g_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2} \nabla^2 w_i \\
 &= -\frac{1}{2bB_1} \int_0^b -\sum_{n=1}^{\infty} q_{in} \sin \beta_n \eta d\eta \frac{G(x, a_i)}{\varphi_n} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \\
 &= -\frac{1}{2bB_1} \int_0^b -\sum_{n=1}^{\infty} q_{in} \sin^2 \beta_n \eta d\eta \frac{G(x, a_i)}{\varphi_n} \sin \beta_n y \\
 &= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, a_i)}{\varphi_n} q_{in} \sin \beta_n y
 \end{aligned}$$

よって、たわみのラプラスアンは載荷荷重と弾性支持桁の反力のラプラスアンを足し合わせて求められる。集中荷重に対して、

$$\begin{aligned}
 g &= g_0 + \sum_{i=1}^r g_i \\
 &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, \xi)}{\varphi_n} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, a_i)}{\varphi_n} q_{in} \sin \beta_n y
 \end{aligned} \tag{29}$$

部分等分布荷重に対しては、

$$\begin{aligned}
 g &= g_0 + \sum_{i=1}^r g_i \\
 &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^2} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, a_i)}{\varphi_n} q_{in} \sin \beta_n y
 \end{aligned} \tag{30}$$

ここで、たわみ w の y に関する 2 階の微分を求めると、集中荷重に対して

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\
 &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \sin \beta_n y
 \end{aligned} \tag{31}$$

また、部分等分布荷重に対しては、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\
&= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n J_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^4} (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \sin \beta_n y \\
&\quad + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \sin \beta_n y
\end{aligned} \tag{32}$$

以上から、版の曲げモーメントは次式で計算できる。

$$\begin{aligned}
M_x &= -B_1 \left\{ 2g - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\
M_y &= -B_2 \left\{ 2\nu g + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}
\end{aligned} \tag{33}$$

3-3 ねじりモーメントの計算

次に、ねじりモーメントは、たわみ w の x と y に関するそれぞれ 1 階微分を求めると、集中荷重に対して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x} \sin \beta_n \eta \cos \beta_n y - \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, a_i)}{\partial x} q_{in} \cos \beta_n y\end{aligned}\quad (34)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x} &= \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left\{ -\varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|) + \varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \right\} \\ &= -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \left\{ \text{sign}(x - \xi) \varphi_n (|x - \xi|) \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \right\}\end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned}\text{sign}(x - \xi) &= 1 \quad ; \quad x \geq \xi \\ &= -1 \quad ; \quad x \leq \xi\end{aligned}$$

部分等分布荷重に対しては、式 (34) 右辺第 1 項において集中荷重 P に $P = pd\xi d\eta$ を代入して $\xi = \xi_1 \sim \xi_2$ 、 $\eta = \eta_1 \sim \eta_2$ の荷重領域内で積分すれば、

$x \leq \xi_1 \leq \xi_2$, $\xi_1 \leq \xi_2 \leq x$ の場合

$$\begin{aligned}& -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \text{sign}(x - \xi) \varphi_n (|x - \xi|) \exp(-\varphi_n |x - \xi|) d\xi \\ &= -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \text{sign}(x - \xi) \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|) d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) d\xi \right]\end{aligned}$$

式 (8) , (9) と式 (10) より

$$\begin{aligned}&= -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \text{sign}(x - \xi) \left[\frac{1}{\varphi_n} J_n(x, \xi_1, \xi_2) - \frac{1}{\varphi_n} I_n(x, \xi_1, \xi_2) \right] \\ &= -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \text{sign}(x - \xi) [J_n(x, \xi_1, \xi_2) - I_n(x, \xi_1, \xi_2)] \\ &= -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} K_n(x, \xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$

$\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ の場合

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \text{sign}(x-\xi) \varphi_n (|x-\xi|) \exp(-\varphi_n |x-\xi|) d\xi \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \int_{\xi_1}^x \text{sign}(x-\xi) \varphi_n (|x-\xi|) \exp(-\varphi_n |x-\xi|) d\xi \\
& \qquad \qquad \qquad -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \int_x^{\xi_2} \text{sign}(x-\xi) \varphi_n (|x-\xi|) \exp(-\varphi_n |x-\xi|) d\xi
\end{aligned}$$

右辺第 1 項は、

$$\text{sign}(x-\xi) = 1$$

$$|x-\xi| = x-\xi = z$$

$$d\xi = -dz$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \int_{x-\xi_1}^0 -\varphi_n z \exp(-\varphi_n z) dz \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \left[z \exp(-\varphi_n z) + \frac{1}{\varphi_n} \exp(-\varphi_n z) \right]_{x-\xi_1}^0 \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \left[\frac{1}{\varphi_n} - \left\{ (x-\xi_1) \exp(-\varphi_n (x-\xi_1)) + \frac{1}{\varphi_n} \exp(-\varphi_n (x-\xi_1)) \right\} \right] \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left[1 - \{1 + \varphi_n (x-\xi_1)\} \exp(-\varphi_n (x-\xi_1)) \right] \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left[1 - \{1 + \varphi_n |x-\xi_1|\} \exp(-\varphi_n |x-\xi_1|) \right]
\end{aligned}$$

右辺第 2 項は、

$$\text{sign}(x-\xi) = -1$$

$$|x-\xi| = -x+\xi = z$$

$$d\xi = dz$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \int_0^{-x+\xi_2} -\varphi_n z \exp(-\varphi_n z) dz \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \left[z \exp(-\varphi_n z) + \frac{1}{\varphi_n} \exp(-\varphi_n z) \right]_0^{-(x-\xi_2)} \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \left[-\frac{1}{\varphi_n} + \left\{ -(x-\xi_2) \exp(\varphi_n (x-\xi_2)) + \frac{1}{\varphi_n} \exp(\varphi_n (x-\xi_2)) \right\} \right] \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left[-1 + \{1 - \varphi_n (x-\xi_2)\} \exp(\varphi_n (x-\xi_2)) \right] \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left[-1 + \{1 + \varphi_n |x-\xi_2|\} \exp(-\varphi_n |x-\xi_2|) \right]
\end{aligned}$$

第 1 項と第 2 項を足し合わせて

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \text{sign}(x-\xi) \varphi_n (|x-\xi|) \exp(-\varphi_n |x-\xi|) d\xi \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left[1 - \{1 + \varphi_n |x-\xi_1|\} \exp(-\varphi_n |x-\xi_1|) \right] + \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left[-1 + \{1 + \varphi_n |x-\xi_2|\} \exp(-\varphi_n |x-\xi_2|) \right] \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \left[-\{1 + \varphi_n |x-\xi_1|\} \exp(-\varphi_n |x-\xi_1|) + \{1 + \varphi_n |x-\xi_2|\} \exp(-\varphi_n |x-\xi_2|) \right] \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} K_n(x, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned}$$

よって、部分等分布荷重よるねじりモーメントは

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} & = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{p d\xi d\eta}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x} \sin \beta_n \eta \cos \beta_n y \\
& = -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} K_n(x, \xi_1, \xi_2) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sin \beta_n \eta d\eta \cos \beta_n y \\
& = -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} K_n(x, \xi_1, \xi_2) \left[-\frac{1}{\beta_n} \cos \beta_n \eta \right]_{\eta_1}^{\eta_2} \cos \beta_n y \\
& = -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^3} K_n(x, \xi_1, \xi_2) (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{35}$$

次に弾性支持桁の影響は、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} & = -\frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, a_i)}{\partial x} q_{in} \cos \beta_n y \\
& = \frac{1}{4B_1} \text{sign}(x-a_i) \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \{ \varphi_n (|x-a_i|) \exp(-\varphi_n |x-a_i|) \} q_{in} \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{36}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, a_i)}{\partial x} & = \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} \{ -\varphi_n \exp(-\varphi_n |x-a_i|) (1 + \varphi_n |x-a_i|) + \varphi_n \exp(-\varphi_n |x-a_i|) \} \\
& = -\frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \{ \text{sign}(x-a_i) \varphi_n (|x-a_i|) \exp(-\varphi_n |x-a_i|) \}
\end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned}
\text{sign}(x-a_i) & = 1 & ; & & x \geq a_i \\
& = -1 & ; & & x \leq a_i
\end{aligned}$$

よって部分等分布荷重による版のねじりモーメントは次式で求められる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \\
&= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^3} K_n(x, \xi_1, \xi_2) (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \cos \beta_n y \\
&\quad + \frac{1}{4B_1} \operatorname{sign}(x - a_i) \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^2} \{ \varphi_n (|x - a_i|) \exp(-\varphi_n |x - a_i|) \} q_{in} \cos \beta_n y \\
M_{xy} &= -\sqrt{B_1 B_2} \left[1 - \frac{(1 + \kappa^2)}{2\kappa} \nu \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
\kappa &= \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}
\end{aligned} \tag{37}$$

3-4 せん断力の計算

次にせん断力はたわみのラプラシアンの x 、 y 及びたわみ w の x 、 y に関する 3 階微分を求めることにより計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2g - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_1 &= \kappa + \frac{\nu}{2}(1 - \kappa^2) \\ k_2 &= \frac{1}{\kappa} + \frac{\nu}{2}\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \\ \kappa &= \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}, \quad \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \\ Q_x &= -B_1 \left[2 \frac{\partial g}{\partial x} + (k_1 - 1) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ Q_y &= -B_2 \left[2k_2 \frac{\partial g}{\partial y} + (1 - k_2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right]\end{aligned}$$

まず、 Q_x を求める。

集中荷重に対しては式 (5) からたわみのラプラシアン w の x に関する 1 階微分は、

$$\begin{aligned}g_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, \xi)}{\varphi_n} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \\ \frac{\partial g_0}{\partial x} &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y\end{aligned}\tag{38}$$

$$\begin{aligned}G(x, \xi) &= \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - \xi|) \right\} \\ \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} &= -\varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi) \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - \xi|) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi) \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \\ &= \varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi) \left\{ -1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - \xi|) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \right\} \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \\ &= \varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi) \left\{ \left[-1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \right] \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - \xi|) \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \right\}\end{aligned}\tag{39}$$

次に、弾性支持桁の影響は、

$$\begin{aligned}
g_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, a_i)}{\varphi_n} q_{in} \sin \beta_n y \\
\frac{\partial g_i}{\partial x} &= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \frac{\partial G(x, a_i)}{\partial x} q_{in} \sin \beta_n y \\
G(x, a_i) &= \exp(-\varphi_n |x - a_i|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - a_i|) \right\} \\
\frac{\partial G(x, a_i)}{\partial x} &= -\varphi_n \operatorname{sign}(x - a_i) \exp(-\varphi_n |x - a_i|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - a_i|) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \varphi_n \operatorname{sign}(x - a_i) \exp(-\varphi_n |x - a_i|) \\
&= -\varphi_n \operatorname{sign}(x - a_i) \exp(-\varphi_n |x - a_i|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - a_i|) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \right\} \\
&= -\varphi_n \operatorname{sign}(x - a_i) \exp(-\varphi_n |x - a_i|) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 + \varphi_n |x - a_i|) \right\} \\
&\equiv -\varphi_n H(x, a_i) \\
\frac{\partial g_i}{\partial x} &= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \frac{\partial G(x, a_i)}{\partial x} q_{in} \sin \beta_n y \\
&= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \{-\varphi_n H(x, a_i)\} q_{in} \sin \beta_n y \tag{40} \\
&= -\frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} H(x, a_i) q_{in} \sin \beta_n y
\end{aligned}$$

次に集中荷重によるたわみ w の x と y のそれぞれ 1 階と 2 階の微分は式 (31) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\
&= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \sin \beta_n y \\
\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y^2} \\
&= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, a_i)}{\partial x} q_{in} \sin \beta_n y \tag{41}
\end{aligned}$$

ここで、 $\Omega(x, \xi)$ の x に関する 1 階微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x} &= -\varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) (1 + \varphi_n |x - \xi|) + \varphi_n \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \\ &= -\text{sign}(x - \xi) \varphi_n^2 (|x - \xi|) \exp(-\varphi_n |x - \xi|) \\ \frac{\partial \Omega(x, a_i)}{\partial x} &= -\text{sign}(x - a_i) \varphi_n^2 (|x - a_i|) \exp(-\varphi_n |x - a_i|)\end{aligned}$$

次に部分等分布荷重に対しては、式 (38) において、集中荷重 P に $P = p d\xi d\eta$ を代入して $\xi = \xi_1 \sim \xi_2$ 、 $\eta = \eta_1 \sim \eta_2$ の荷重領域内で積分しても良いが、ここでは、式 (11) を x で 1 階微分することより求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_0}{\partial x} &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^2} \frac{\partial L_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\partial x} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y \\ \frac{\partial}{\partial x} L_n(x, \xi_1, \xi_2) &= \frac{\partial}{\partial x} I_n(x, \xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} J_n(x, \xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$

右辺第 1 項は式 (10) より、

$x < \xi_1 < \xi_2$, $\xi_1 < \xi_2 < x$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} I_n(x, \xi_1, \xi_2) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right| \right) \\ &= \varphi_n \left| -\text{sign}(x - \xi_1) \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) + \text{sign}(x - \xi_2) \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right| \\ &\equiv \varphi_n M_n(x, \xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$

$\xi_1 < x < \xi_2$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} I_n(x, \xi_1, \xi_2) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| 2 - \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right| \right) \\ &= \varphi_n \left| -\text{sign}(x - \xi_1) \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) + \text{sign}(x - \xi_2) \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right| \\ &\equiv \varphi_n M_n(x, \xi_1, \xi_2)\end{aligned}$$

右辺第2項は式(8)より

$x < \xi_1 < \xi_2, \xi_1 < \xi_2 < x$ のとき、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} J_n(x, \xi_1, \xi_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) (2 + \varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) (2 + \varphi_n |x - \xi_2|) \right| \right) \\
&= \left| \begin{aligned} & -\varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi_1) \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) (2 + \varphi_n |x - \xi_1|) + \varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi_1) \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) \\ & + \varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi_2) \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) (2 + \varphi_n |x - \xi_2|) + \varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi_2) \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \end{aligned} \right| \\
&= \left| \begin{aligned} & -\varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi_1) \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) - \varphi_n^2 \operatorname{sign}(x - \xi_1) |x - \xi_1| \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) \\ & + \varphi_n \operatorname{sign}(x - \xi_2) \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) + \varphi_n^2 \operatorname{sign}(x - \xi_2) |x - \xi_2| \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \end{aligned} \right| \\
&= \varphi_n \left| \begin{aligned} & \operatorname{sign}(x - \xi_1) \left\{ -\exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) - \varphi_n |x - \xi_1| \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) \right\} \\ & + \operatorname{sign}(x - \xi_2) \left\{ \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) + \varphi_n |x - \xi_2| \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right\} \end{aligned} \right| \\
&= \varphi_n O_n(x, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned}$$

$\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ のとき、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} J_n(x, \xi_1, \xi_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| 4 - \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) (2 + \varphi_n |x - \xi_1|) - \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) (2 + \varphi_n |x - \xi_2|) \right| \right) \\
&= \varphi_n \left| \begin{aligned} & -\operatorname{sign}(x - \xi_1) \left\{ -\exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) - \varphi_n |x - \xi_1| \exp(-\varphi_n |x - \xi_1|) \right\} \\ & \operatorname{sign}(x - \xi_2) \left\{ \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) + \varphi_n |x - \xi_2| \exp(-\varphi_n |x - \xi_2|) \right\} \end{aligned} \right| \\
&= \varphi_n O_n(x, \xi_1, \xi_2)
\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial x} L_n(x, \xi_1, \xi_2) = \frac{\partial}{\partial x} I_n(x, \xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} J_n(x, \xi_1, \xi_2)$$

$$\varphi_n R_n(x, \xi_1, \xi_2) = \varphi_n M_n(x, \xi_1, \xi_2) + \varphi_n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) O_n(x, \xi_1, \xi_2)$$

と表記すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_0}{\partial x} &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n^2} \frac{\partial L_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\partial x} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y \\
&= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y
\end{aligned} \tag{42}$$

次に部分等分布荷重によるたわみ w の x と y のそれぞれ 1 階と 2 階の微分は式 (37) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial y^2} \\ &= \frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n^3} K_n(x, \xi_1, \xi_2) (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \sin \beta_n y \\ &\quad - \frac{1}{4B_1} \text{sign}(x - a_i) \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\varphi_n^2} \{ \varphi_n (|x - a_i|) \exp(-\varphi_n |x - a_i|) \} q_{in} \sin \beta_n y\end{aligned}\quad (43)$$

よって、部分等分布荷重に対するせん断力 Q_x は次式で計算できる。

$$\begin{aligned}Q_x &= -B_1 \left[2 \frac{\partial g}{\partial x} + (k_1 - 1) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ &= -B_1 \left[2 \left(\frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial g_i}{\partial x} \right) + (k_1 - 1) \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \\ \frac{\partial g_0}{\partial x} &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y \\ \frac{\partial g_i}{\partial x} &= -\frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} H(x, a_i) q_{in} \sin \beta_n y \\ \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, \xi)}{\partial x} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \\ \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial y^2} &= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\varphi_n^3} \frac{\partial \Omega(x, a_i)}{\partial x} q_{in} \sin \beta_n y \\ k_1 &= \kappa + \frac{V}{2} (1 - \kappa^2) \\ \kappa &= \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}\end{aligned}\quad (44)$$

次に、 Q_y を求める。

集中荷重に対しては式 (5) からたわみのラプラスアンの y に関する 1 階微分は、

$$\begin{aligned}g_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, \xi)}{\varphi_n} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y \\ \frac{\partial g_0}{\partial y} &= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n} G(x, \xi) \sin \beta_n \eta \cos \beta_n y\end{aligned}\quad (45)$$

$G(x, \xi)$ については、式 (6) 参照。

次に、弾性支持桁の影響は、

$$\begin{aligned}
g_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(x, a_i)}{\varphi_n} q_{in} \sin \beta_n y \\
\frac{\partial g_i}{\partial y} &= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n} G(x, a_i) q_{in} \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{46}$$

次に集中荷重によるたわみ w の y に関する 3 階微分は式 (31) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\
&= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \sin \beta_n y + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \sin \beta_n y \\
\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} \\
&= -\frac{P}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 \Omega(x, \xi)}{\varphi_n^3} \sin \beta_n \eta \cos \beta_n y + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{47}$$

$\Omega(x, \xi)$ については、式 (4) 参照。

次に、部分等分布荷重に対しては式 (11) からたわみのラプラスシアン y に関する 1 階微分は、

$$\begin{aligned}
g_0 &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^2} \frac{\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2}{\beta_n} \sin \beta_n y \\
\frac{\partial g_0}{\partial y} &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^2} (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{48}$$

$L_n(x, \xi_1, \xi_2)$ については、式 (12) 参照。

部分等分布荷重によるたわみ w の y に関する 3 階微分は式 (32) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\
&= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n J_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^4} (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \sin \beta_n y \\
&\quad + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \sin \beta_n y \\
\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} \\
&= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 J_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^4} (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \cos \beta_n y \\
&\quad + \frac{1}{4B_1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{49}$$

よって、部分等分布荷重に対するせん断力 Q_y は次式で計算できる。

$$\begin{aligned}
Q_y &= -B_2 \left[2k_2 \frac{\partial g}{\partial y} + (1 - k_2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \\
&= -B_2 \left[2k_2 \left(\frac{\partial g_0}{\partial y} + \frac{\partial g_i}{\partial y} \right) + (1 - k_2) \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} \right) \right] \\
\frac{\partial g_0}{\partial y} &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^2} (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \cos \beta_n y \\
\frac{\partial g_i}{\partial x} &= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\varphi_n} G(x, a_i) q_{in} \cos \beta_n y \\
\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} &= -\frac{p}{2bB_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 J_n(x, \xi_1, \xi_2)}{\varphi_n^4} (\cos \beta_n \eta_1 - \cos \beta_n \eta_2) \cos \beta_n y \\
\frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} &= \frac{1}{4B_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 \Omega(x, a_i)}{\varphi_n^3} q_{in} \cos \beta_n y \\
k_2 &= \frac{1}{\kappa} + \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \\
\kappa &= \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}
\end{aligned} \tag{50}$$

3-5 弾性支持桁のたわみと断面力

次に弾性支持桁のたわみ、及び断面力は次式で計算できる。

せん断力は

$$Q_i = \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} q_{in} \sin \beta_n y dy = \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{in}}{n} \cos \beta_n y \quad (51)$$

支点反力は $y=0$ において

$$R_{i0} = \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{in}}{n} \quad (52)$$

$y=b$ では

$$R_{ib} = \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{q_{in}}{n} \quad (53)$$

曲げモーメントは

$$M_i = -\int_0^b dy \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} q_{in} \sin \beta_n y dy = \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{in}}{n^2} \sin \beta_n y \quad (54)$$

§ 4 参考文献

1. H. Olsen, F. Reinitzhuber, A. Coblenz : Die zweiseitig gelagerte Platte, Ernst & Sohn, 1979
2. 高尾孝二 : 鋼道路橋鉄筋コンクリート床版の曲げモーメント計算式、橋梁と基礎、1985