

不完全合成部材の解析

序

合成・複合構造は鋼構造のみならずコンクリート構造でも多用されており、今後は我国においても更にその比重は高まると予想される。しかし、その設計計算法はいまだに混乱があり整理が不十分と見受ける。これまでの記述方法では解決できないものがあると思えるため、合成部材の構造解析と設計計算法を、これまでと異なる視点で記述していく。

まずはその1つとして、ここでは設計計算に用いる変位や断面力を算定するための構造解析を扱う。表記上は鋼合成部材としているが、床版と主桁の鋼断面もコンクリート断面も断面積や断面二次モーメントを有するとしており、さらにプレストレス荷重も考慮してあるので、そのままPC合成部材にも適用可能である。当社では、クリープ・乾燥収縮を含む固定荷重用の連続合成桁解析プログラムは、鋼とPCのどちらにも適用できるように作成している。

なお、この技術報告の原点は平成10年に整理した社内資料にあり、道示やこれまでの参考書にある一般的な扱い方では問題が顕在化してきたため、再度整理し直して公表することにしたものがある。

設計に適用するには、この他に総断面力(合成断面全体の断面力)の分担断面力(合成断面構成要素の個々の断面力)への分解も必要になるが、それに関しては次号の技術報告で記述する。

2011年6月6日 倉方 慶夫

不完全合成部材の解析

東京支社・設計部 田中 伸英 ， 同 石澤 俊希
本社・技術本部長 梶田 順一 ， 同・顧問 倉方 慶夫

[目 次]

1. はじめに	1
2. 変位と変形	2
3. つり合い式	3
4. 断面力と変位の関係	6
5. 有限要素法による剛性方程式の誘導	7
6. 有限要素の剛性方程式の縮小	10
7. 床版と鋼桁の個々の断面力	11
8. クリープと乾燥収縮	13
9. おわりに	15
補遺：変位関数の積分値	16

1. はじめに

合成部材の設計ではコンクリートと鋼部材の接合面のずれ変形を無視した解析を一般に行う。これを完全合成といい、その接合面の結合を剛と仮定しても断面上の直応力に関しては実務の範囲で殆ど問題を生じない。ただ、剛な結合であると、水平集中荷重点でのコンクリートと鋼部材間の水平せん断応力(以下では、ジベルのせん断応力と呼称する)も一点に集中し、ジベルのせん断応力の分布状況を議論することができない。また、桁端を含め、断面変化点でも同様のことが生じ、クリープや乾燥収縮に伴うジベルのせん断応力は断面変化点の一点に集中する。しかし現実にはそのようなことは有り得ず、荷重集中点や断面変化点において、ジベルのせん断応力は集中的に発生するもののある程度の長さに亘り分布する。そのため、道路橋示方書Ⅱ¹⁾では簡便な方法として、合成桁の端支点部についてはジベルの水平せん断応力の分布長を支間長や主桁間隔の関数として与えている。

これと同様に連続合成桁の床版の打ち継ぎ部や中間支点部の床版コンクリートのひび割れ箇所ジベルの水平せん断応力は集中的に発生する。このような不連続点でのジベルのせん断応力分布を推測するために、ここではコンクリートと鋼桁の接合面のずれ変位を考慮した合成部材(不完全合成部材, 弾性合成部材)の解析を行う。ただし、完全合成部材への変換が容易に行える形にまとめる。

また、合成部材では断面の図心軸が合成前と後で大きく移動することに留意しなければならない。またクリープ・乾燥収縮応力の解析でもコンクリートのヤング係数が見掛け上変化するため断面図心軸は変動する。軸方向変位を問題にしない桁構造の解析では、桁長方向の座標のみが指標になるので問題は生じないが、任意の骨組構造中の合成部材を対象とするとき、断面図心軸を解析の座標軸とすると、断面図心軸の変動に合わせて解析の座標軸を度々組み直す必要が生じて大変不便である。

この問題を解消するために、ここでは断面図心軸に並行に任意に座標軸を設定し、設計計算の全解析を一定の座標軸のもとで解析を行えるように計画する。この場合、断面定数として断面一次モーメントがゼロではなくなるが、計算対象によって座標系を組み直すよりは遥かに楽である。

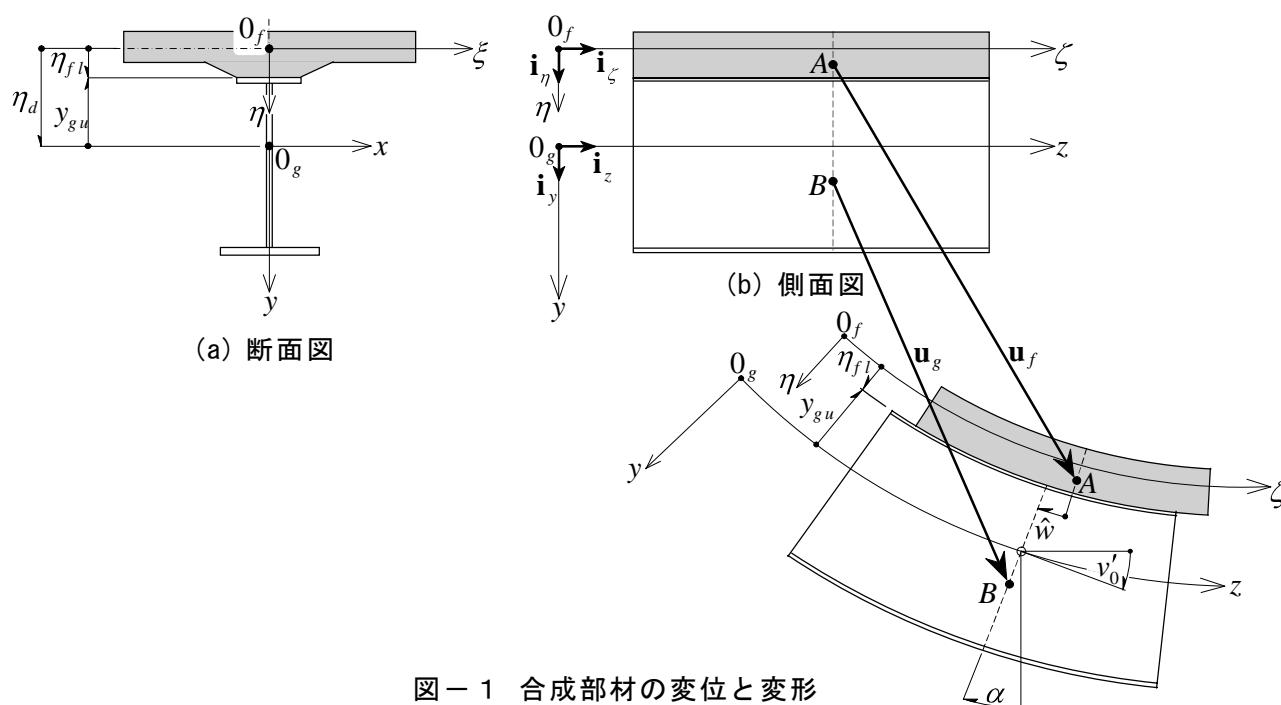


図-1 合成部材の変位と変形

なお、ここでは鋼合成桁を対象として式展開を行うが、ここで求める解析式は、PC合成桁を含め、任意の合成部材にも適用可能である。

2. 変位と変形

図-1に示すように、鋼桁に (x, y, z) 座標、床版に (ξ, η, ζ) 座標を導入する。それらの断面上の座標は (ξ, η) と (x, y) 座標である。 ζ 軸と z 軸は、それぞれ床版部材と鋼桁部材の軸線に平行に設定するが、必ずしもそれらの図心軸であるとは限らないものとする。

ζ 軸と z 軸の間隔を η_d とすると、各座標間の関係は、

$$y = \eta - \eta_d, \quad z = \zeta \quad (2.1)$$

であり、床版と鋼桁の接合面の η 座標値を η_{fl} 、 y 座標値を y_{gu} とすると、

$$\eta_d = \eta_{fl} - y_{gu} \quad (2.2)$$

である。

変位は \overline{xy} ($\overline{\eta\zeta}$)平面内でのみ生ずるものとし、床版部材と鋼桁部材の一般点の変位ベクトルをそれぞれ \mathbf{u}_f と \mathbf{u}_g と表すとき、各部材断面は平面を保持するとすれば、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_f &= v_{f0} \mathbf{i}_\eta + (w_{f0} - \alpha \eta) \mathbf{i}_\zeta \\ \mathbf{u}_g &= v_{g0} \mathbf{i}_y + (w_{g0} - \alpha y) \mathbf{i}_z \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

となる。ここに、 $\mathbf{i}_\eta, \mathbf{i}_\zeta$ は (η, ζ) 座標の基本ベクトル、 $\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ は (y, z) 座標の基本ベクトルである。また、 v_{f0} と w_{f0} はそれぞれ ζ 軸上の $\mathbf{i}_\eta, \mathbf{i}_\zeta$ 方向の変位、 v_{g0} と w_{g0} はそれぞれ z 軸上の $\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ 方向の変位であり、 α は断面の回転変位である。

各部材の断面は変形せず、それらの間の接合面では鉛直方向の相対的な変位は生じないとすれば、 v_{f0} と v_{g0} は等しく、

$$v_0 = v_{f0} = v_{g0} \quad (2.4)$$

と表せる。さらに各部材のせん断変形は一般に無視できるので、断面の回転変位は部材軸の角変位 $v'_0 (= dv_0/dz)$ と等しく、

$$\alpha = v'_0 \quad (2.5)$$

となる。したがって、一般点の変位成分を、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_f &= v_f \mathbf{i}_\eta + w_f \mathbf{i}_\zeta \\ \mathbf{u}_g &= v_g \mathbf{i}_y + w_g \mathbf{i}_z \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

と表すとき、

$$\left. \begin{aligned} v_f &= v_0, \quad w_f = w_{f0} - v'_0 \eta \\ v_g &= v_0, \quad w_g = w_{g0} - v'_0 y \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となる。

上式から、床版部材の直ひずみ ε_ζ と鋼桁部材の直ひずみ ε_z は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\zeta &= \partial w_f / \partial \zeta = w'_{f0} - v''_0 \eta \\ \varepsilon_z &= \partial w_g / \partial z = w'_{g0} - v''_0 y \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

また、床版と鋼桁のずれ変位 \hat{w} は、

$$\hat{w} = w_g (y = y_{gu}) - w_f (\eta = \eta_{fl}) = w_{g0} + v'_0 \eta_d - w_{f0} \quad (2.9)$$

となる。

3. つり合い式

この合成桁のつり合いに対して仮想仕事の原理を適用すると、

$$\begin{aligned}
& \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{A_f} \sigma_f \delta \varepsilon_\zeta dA_f + \int_{A_g} \sigma_g \delta \varepsilon_z dA_g \right) dz \\
& + \int_{z_1}^{z_2} q_d \delta \hat{w} dz \\
& - \int_{z_1}^{z_2} \left(\mathbf{p}_f \cdot \delta \mathbf{u}_{f0} + \mathbf{p}_g \cdot \delta \mathbf{u}_{g0} \right) dz - \left[n_z \left\{ \int_{A_f} \bar{\mathbf{p}}_f \cdot \delta \mathbf{u}_f dA_f + \int_{A_g} \bar{\mathbf{p}}_g \cdot \delta \mathbf{u}_g dA_g \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (3.1)
\end{aligned}$$

となる．ここに， $\int_{A_f} dA_f$ は床版断面に亘る積分， $\int_{A_g} dA_g$ は鋼桁断面に亘る積分を表し， n_z は両端断面の外向き単位法線ベクトルの \mathbf{i}_z 方向成分である．

$$n_z = \begin{cases} -1, & (z = z_1) \\ 1, & (z = z_2) \end{cases} \quad (3.2)$$

σ_f と σ_g は床版と鋼桁の直応力， q_d は床版と桁の接合面のジベルのせん断応力（せん断流）であり， \mathbf{u}_{f0} と \mathbf{u}_{g0} はそれぞれ床版と鋼桁の軸線上の変位である．すなわち，

$$\mathbf{u}_{f0} = \mathbf{u}_f(\eta = 0), \quad \mathbf{u}_{g0} = \mathbf{u}_g(y = 0) \quad (3.3)$$

である．また，床版の ζ 軸と鋼桁の z 軸上にそれぞれ分布荷重 \mathbf{p}_f と \mathbf{p}_g が作用し，床版部と鋼桁部の両端断面にはそれぞれ $\bar{\mathbf{p}}_f$ と $\bar{\mathbf{p}}_g$ なる表面力が作用するとし，その成分を，

$$\mathbf{p}_f = p_\eta \mathbf{i}_\eta + p_\zeta \mathbf{i}_\zeta, \quad \mathbf{p}_g = p_y \mathbf{i}_y + p_z \mathbf{i}_z \quad (3.4)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_f = \bar{p}_\eta \mathbf{i}_\eta + \bar{p}_\zeta \mathbf{i}_\zeta, \quad \bar{\mathbf{p}}_g = \bar{p}_y \mathbf{i}_y + \bar{p}_z \mathbf{i}_z \quad (3.5)$$

と表す．

式(3.1)に式(2.7)～(2.9)および(3.4)と(3.5)を代入し，

$$\left. \begin{aligned} N_f &= \int_{A_f} \sigma_f dA_f, & M_f &= \int_{A_f} \sigma_f \eta dA_f \\ N_g &= \int_{A_g} \sigma_g dA_g, & M_g &= \int_{A_g} \sigma_g y dA_g \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_f &= \int_{A_f} \bar{p}_\eta dA_f, & \bar{N}_f &= \int_{A_f} \bar{p}_\zeta dA_f, & \bar{M}_f &= \int_{A_f} \bar{p}_\zeta \eta dA_f \\ \bar{S}_g &= \int_{A_g} \bar{p}_y dA_g, & \bar{N}_g &= \int_{A_g} \bar{p}_z dA_g, & \bar{M}_g &= \int_{A_g} \bar{p}_z y dA_g \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

と表すと，

$$\begin{aligned}
& \int_{z_1}^{z_2} \left\{ -(M_f + M_g) \delta v_0'' + N_f \delta w'_{f0} + N_g \delta w'_{g0} \right\} dz + \int_{z_1}^{z_2} q_d \delta (w_{g0} + v_0' \eta_d - w_{f0}) dz \\
& - \int_{z_1}^{z_2} \left\{ (p_\eta + p_y) \delta v_0 + p_\zeta \delta w_{f0} + p_z \delta w_{g0} \right\} dz
\end{aligned}$$

$$-\left[n_z \left\{ (\bar{S}_f + \bar{S}_g) \delta v_0 - (\bar{M}_f + \bar{M}_g) \delta v'_0 + \bar{N}_f \delta w_{f0} + \bar{N}_g \delta w_{g0} \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (3.8)$$

となり，部分積分を行うと，

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \left[(-M_0'' - q_d' \eta_d - p_{vy}) \delta v_0 + (-N_f' - q_d - p_\zeta) \delta w_{f0} + (-N_g' + q_d - p_z) \delta w_{g0} \right] dz \\ - \left[(-M_0' - q_d \eta_d + n_z \bar{S}_v) \delta v_0 + (M_0 - n_z \bar{M}_0) \delta v'_0 \right. \\ \left. + (-N_f + n_z \bar{N}_f) \delta w_{f0} + (-N_g + n_z \bar{N}_g) \delta w_{g0} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる．ここに，

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= M_f + M_g \\ p_{vy} &= p_\eta + p_y \\ \bar{M}_0 &= \bar{M}_f + \bar{M}_g \\ \bar{S}_v &= \bar{S}_f + \bar{S}_g \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

と表した．

式(3.9)が任意の仮想変位に対して成立するためには，仮想変位の各係数が零とならなければならないことから，つり合い式と応力の境界条件が次のように求まる．

[つり合い式]

$$\cdot \mathbf{i}_y \text{ 方向のつり合い : } -M_0'' - (q_d \eta_d)' - p_v = 0 \quad (3.11a)$$

$$\cdot \text{床版の } \mathbf{i}_\zeta \text{ 方向のつり合い : } -N_f' - q_d - p_\zeta = 0 \quad (3.11b)$$

$$\cdot \text{鋼桁の } \mathbf{i}_z \text{ 方向のつり合い : } -N_g' + q_d - p_z = 0 \quad (3.11c)$$

[力学的境界条件]

$$\cdot \text{合成断面のせん断力 : } n_z \bar{S} = M_0' + q_d \eta_d \quad (3.12a)$$

$$\cdot \text{合成断面の曲げモーメント : } n_z \bar{M}_0 = M_0 \quad (3.12b)$$

$$\cdot \text{床版の軸力 : } n_z \bar{N}_f = N_f \quad (3.12c)$$

$$\cdot \text{鋼桁の軸力 : } n_z \bar{N}_g = N_g \quad (3.12d)$$

以上も1つのつり合い式であるが， M_0 は単に床版と鋼桁の曲げモーメントの和であり，合成断面としての全体曲げモーメントを表してなく，また合成断面全体の軸力も現れてこない．そこで通常の場合の合成桁のつり合い式に近い形にするために床版の軸方向変位 w_{f0} を消去する．すなわち式(2.9)から，

$$w_{f0} = w_{g0} + v'_0 \eta_d - \hat{w} \quad (3.13)$$

として，これを式(3.8)に代入すると，

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} (-M_v \delta v_0'' + N_v \delta w_{g0}' - N_f \delta \hat{w}') dz + \int_{z_1}^{z_2} q_d \delta \hat{w} dz \\ - \int_{z_1}^{z_2} (p_{vy} \delta v_0 + p_\zeta \eta_d \delta v_0' + p_{vz} \delta w_{g0} - p_\zeta \delta \hat{w}) dz \\ - \left[n_z (\bar{S}_v \delta v_0 - \bar{M}_v \delta v_0' + \bar{N}_v \delta w_{g0} - \bar{N}_f \delta \hat{w}) \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる．ここに，

$$M_v = M_f + M_g - N_f \eta_d, \quad N_v = N_f + N_g \quad (3.15)$$

$$\bar{M}_v = \bar{M}_f + \bar{M}_g - \bar{N}_f \eta_d, \quad \bar{N}_v = \bar{N}_f + \bar{N}_g \quad (3.16)$$

$$p_{vz} = p_\zeta + p_z \quad (3.17)$$

である。 M_v, N_v はそれぞれ合成断面全体としての曲げモーメントと軸力を表している。ただし、 M_v は鋼桁の軸線上での値であり、合成断面の重心軸上で曲げモーメントではない。

式(3.13)の部分積分を遂行すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} & \left[-\left(M_v'' + p_{vy} - p_\zeta' \eta_d \right) \delta v_0 - \left(N_v' + p_{vz} \right) \delta w_{g0} + \left(N_f' + q_d + p_\zeta \right) \delta \hat{w} \right] dz \\ & - \left[\left(n_z \bar{S}_v - M_v' + p_\zeta \eta_d \right) \delta v_0 - \left(n_z \bar{M}_v - M_v \right) \delta v_0' \right. \\ & \quad \left. + \left(n_z \bar{N}_v - N_v \right) \delta w_{g0} - \left(n_z \bar{N}_f - N_f \right) \delta w_{g0}' \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

これより、式(3.11)と(3.12)に対応する別の表式のつり合い式と応力の境界条件が次のように求まる。

[つり合い式]

$$\cdot \text{合成桁の } \mathbf{i}_y \text{ 方向のつり合い：} \quad -M_v'' - p_{vy} + p_\zeta' \eta_d = 0 \quad (3.19a)$$

$$\cdot \text{合成桁の } \mathbf{i}_z \text{ 方向のつり合い：} \quad -N_v' - p_{vz} = 0 \quad (3.19b)$$

$$\cdot \text{床版の } \mathbf{i}_z \text{ 方向のつり合い：} \quad N_f' + q_d + p_\zeta = 0 \quad (3.19c)$$

[力学的境界条件]

$$\cdot \text{合成断面のせん断力：} \quad n_z \bar{S}_v = M_v' - p_\zeta \eta_d \quad (3.20a)$$

$$\cdot \text{合成断面の曲げモーメント：} \quad n_z \bar{M}_v = M_v \quad (3.20b)$$

$$\cdot \text{合成断面の軸力：} \quad n_z \bar{N}_v = N_v \quad (3.20c)$$

$$\cdot \text{床版断面の軸力：} \quad n_z \bar{N}_f = N_f \quad (3.20d)$$

4. 断面力と変位の関係

床版と鋼桁の応力とひずみの関係は、

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_\zeta, \quad \sigma_g = E_g \varepsilon_z \quad (4.1)$$

と表せる. ここに, E_f と E_g はそれぞれ床版と鋼桁のヤング係数である. 上式を式(3.5)に代入し, さらに式(2.8)を代入すると断面力と変位の関係が次のように求まる.

$$\left. \begin{aligned} N_f &= E_f A_f w'_{f0} - E_f J_f v''_0 = E_f A_f (w'_{g0} - \hat{w}') - E_f (J_f - A_f \eta_d) v''_0 \\ N_g &= E_g A_g w'_{g0} - E_g J_g v''_0 \\ M_f &= E_f J_f w'_{f0} - E_f I_f v''_0 = E_f J_f (w'_{g0} - \hat{w}') - E_f (J_f - A_f \eta_d) v''_0 \\ M_g &= E_g J_g w'_{g0} - E_g I_g v''_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_f &= \int_{A_f} dA_f, \quad J_f = \int_{A_f} \eta dA_f, \quad I_f = \int_{A_f} \eta^2 dA_f \\ A_g &= \int_{A_g} dA_g, \quad J_g = \int_{A_g} y dA_g, \quad I_g = \int_{A_g} y^2 dA_g \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

であり, A_f は床版の断面積, J_f は ξ 軸に関する床版の断面 1 次モーメント, I_f は ξ 軸に関する床版の断面 2 次モーメント, A_g は鋼桁の断面積, J_g は x 軸に関する鋼桁の断面 1 次モーメント, I_g は x 軸に関する鋼桁の断面 2 次モーメントを表す.

また, 床版と鋼桁間のせん断応力 q_d は, ジベルのせん断剛度(床版と鋼桁間の単位長当りの分布せん断バネ)を k_d とするとき,

$$q_d = k_d \hat{w}' \quad (4.4)$$

と表せるものとする.

式(3.15)に式(4.2)を代入すると,

$$\left. \begin{aligned} M_v &= E_g J_v w'_{f0} - E_g I_v v''_0 - E_f (J_f - A_f \eta_d) \hat{w}' \\ N_v &= E_g A_v w'_{g0} - E_g J_v v''_0 - E_f A_f \hat{w}' \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

となる. ここに、

$$n = \frac{E_g}{E_f} \quad (4.6)$$

とするとき、

$$\left. \begin{aligned} A_v &= \frac{1}{n} A_f + A_g \\ J_v &= \frac{1}{n} (J_f - A_f \eta_d) + J_g \\ I_v &= \frac{1}{n} (I_f - 2J_f \eta_d + A_f \eta_d^2) + I_g \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

5. 有限要素法による剛性方程式の誘導

式(3.11)あるいは(3.19)に式(4.2)と(4.4)あるいは(4.5)を代入すると変位表示のつり合いの微分方程式が求まる．それを解く方法もあるが，ここでは有限要素法を用いて離散化した剛性方程式を組立てる．それに際し床版にプレストレス荷重を与えるものとし，床版の断面力を，

$$M_f \Rightarrow M_f + M_{fp} , N_f \Rightarrow N_f + N_{fp} \quad (5.1)$$

と置換える．ここに， M_{fp}, N_{fp} はプレストレス力が床版の軸線に対して構成する曲げモーメント(図-3の ζ 軸上の値)と軸力であり，既知量である．上式を式(3.15)を介して式(3.14)に代入すると次式となる．

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \left[-\{M_v + M_{fp} - N_{fp}\eta_d\} \delta v_0'' + (N_v + N_{fp}) \delta w'_{g0} - (N_f + N_{fp} - q_d) \delta \hat{w}' \right] dz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} (p_{vy} \delta v_0 + p_{\zeta} \eta_d \delta v_0' + p_{vz} \delta w_{g0} - p_{\zeta} \delta \hat{w}) dz \\ & - \left[n_z (\bar{S}_v \delta v_0 - \bar{M}_v \delta v_0' + \bar{N}_v \delta w_{g0} - \bar{N}_f \delta \hat{w}) \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \left\{ -M_v \delta v_0'' + N_v \delta w'_{g0} - (N_f - q_d) \delta \hat{w}' \right\} dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \left[-\{M_{fp} - N_{fp}\eta_d\} \delta v_0'' + N_{fp} \delta w'_{g0} - N_{fp} \delta \hat{w}' \right] dz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} (p_{vy} \delta v_0 + p_{\zeta} \eta_d \delta v_0' + p_{vz} \delta w_{g0} - p_{\zeta} \delta \hat{w}) dz \\ & - \left[n_z (\bar{S}_v \delta v_0 - \bar{M}_v \delta v_0' + \bar{N}_v \delta w_{g0} - \bar{N}_f \delta \hat{w}) \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (5.2) \end{aligned}$$

上式に式(4.2)，(4.4)および(4.5)を代入すると，1つの有限要素に対する仮想仕事式は次のようになる．

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \left[-\{E_g J_v w'_{g0} - E_g I_v v_0'' - E_f (J_f - A_f \eta_d) \hat{w}'\} \delta v_0'' \right. \\ & \left. + (E_g A_v w'_{g0} - E_g J_v v_0'' - E_f A_f \hat{w}') \delta w'_{g0} - \{E_f A_f (w'_{g0} - \hat{w}') - E_f (J_f - A_f \eta_d) v_0'' - k_d \hat{w}\} \delta \hat{w}' \right] dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \left[-\{M_{fp} - N_{fp}\eta_d\} \delta v_0'' + N_{fp} \delta w'_{g0} - N_{fp} \delta \hat{w}' \right] dz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} (p_{vy} \delta v_0 + p_{\zeta} \eta_d \delta v_0' + p_{vz} \delta w_{g0} - p_{\zeta} \delta \hat{w}) dz \\ & - \left[n_z (\bar{S}_v \delta v_0 - \bar{M}_v \delta v_0' + \bar{N}_v \delta w_{g0} - \bar{N}_f \delta \hat{w}) \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (5.3) \end{aligned}$$

ここに，要素両端の z 座標を z_1 と z_2 と表し，有限棒要素の長さを ℓ とする．

$$\ell = z_2 - z_1 , (z_2 > z_1) \quad (5.4)$$

この棒要素の各部材軸線上の変位を，

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= g_1 \bar{v}_1 + g_2 \bar{v}_2 + g_3 \bar{v}_3 + g_4 \bar{v}_4 \\ \hat{w} &= g_1 \bar{w}_{d1} + g_2 \bar{w}_{d2} + g_3 \bar{w}_{d3} + g_4 \bar{w}_{d4} \\ w_{g0} &= g_1 \bar{w}_{g1} + g_2 \bar{w}_{g2} + g_3 \bar{w}_{g3} + g_4 \bar{w}_{g4} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

と補間する．ここに， g_i は変位関数(形状関数)であり，

$$\mu = (z - z_1) / \ell \quad (5.6)$$

とするととき,

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= 1 - 3\mu^2 + 2\mu^3, & g_2 &= (\mu - 2\mu^2 + \mu^3)\ell \\ g_3 &= 3\mu^2 - 2\mu^3, & g_4 &= (-\mu^2 + \mu^3)\ell \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

である. $\bar{v}_i, \bar{w}_{di}, \bar{w}_{gi}$ ($i=1\sim 4$) などは要素の両端の節点変位や変形を表し,

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= v_0(z=z_1), & \bar{v}_2 &= v'_0(z=z_1) \\ \bar{v}_3 &= v_0(z=z_2), & \bar{v}_4 &= v'_0(z=z_2) \\ \bar{w}_{d1} &= \hat{w}(z=z_1), & \bar{w}_{d2} &= \hat{w}'(z=z_1) \\ \bar{w}_{d3} &= \hat{w}(z=z_2), & \bar{w}_{d4} &= \hat{w}'(z=z_2) \\ \bar{w}_{g1} &= w_{g0}(z=z_1), & \bar{w}_{g2} &= w'_{g0}(z=z_1) \\ \bar{w}_{g3} &= w_{g0}(z=z_2), & \bar{w}_{g4} &= w'_{g0}(z=z_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

である.

また, 断面定数やせん断バネおよび分布外力は要素内で直線変化するものとして,

$$\left. \begin{aligned} A_f &= (1-\mu)A_{f1} + \mu A_{f2}, & J_f &= (1-\mu)J_{f1} + \mu J_{f2}, & I_f &= (1-\mu)I_{f1} + \mu I_{f2} \\ A_g &= (1-\mu)A_{g1} + \mu A_{g2}, & J_g &= (1-\mu)J_{g1} + \mu J_{g2}, & I_g &= (1-\mu)I_{g1} + \mu I_{g2} \\ A_v &= (1-\mu)A_{v1} + \mu A_{v2}, & J_v &= (1-\mu)J_{v1} + \mu J_{v2}, & I_v &= (1-\mu)I_{v1} + \mu I_{v2} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$k_d = (1-\mu)k_{d1} + \mu k_{d2} \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned} p_v &= (1-\mu)p_{v1} + \mu p_{v2} \\ p_\zeta &= (1-\mu)p_{\zeta1} + \mu p_{\zeta2}, & p_z &= (1-\mu)p_{z1} + \mu p_{z2} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

とおく. 添字の1は $z=z_1$ での値, 添字の2は $z=z_2$ での値を示す.

式(5.3)に式(5.5)~(5.7)および(5.9)~(5.11)を代入し, 要素両端の変位・変形の変分量 ($\delta\bar{v}_i, \delta\bar{w}_{di}, \delta\bar{w}_{gi}$) ごとに整理し, 各変分量の係数項を零と, 置くことによって有限要素のつり合い式が次のように求まる.

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{p}} \quad (5.12)$$

ここに, \mathbf{F} は剛性マトリックス, $\bar{\mathbf{u}}$ は変位ベクトル, $\bar{\mathbf{p}}$ は節点力ベクトル(分布荷重による等価節点力を含む)である.

$$\bar{\mathbf{u}}^T = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3 \quad \bar{v}_4 \quad \bar{w}_{d1} \quad \bar{w}_{d2} \quad \bar{w}_{d3} \quad \bar{w}_{d4} \quad \bar{w}_{g1} \quad \bar{w}_{g2} \quad \bar{w}_{g3} \quad \bar{w}_{g4}] \quad (5.13)$$

とするととき, 剛性マトリックス \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} = [f_{mn}], (m, n = 1 \sim 12) \quad (5.14)$$

の各要素 f_{mn} は次のようになる.

$$f_{mn} = E_g I_{v1} \int_{z_1}^{z_2} g_m'' g_n'' dz - E_g (I_{v1} - I_{v2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_m'' g_n'' dz, (m, n = 1 \sim 4) \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} f_{mn} &= E_f (J_{f1} - A_{f1} \eta_d) \int_{z_1}^{z_2} g_m'' g_j' dz - E_f \left\{ (J_{f1} - A_{f1} \eta_d) - (J_{f2} - A_{f2} \eta_d) \right\} \int_{z_1}^{z_2} \mu g_m'' g_j' dz \\ &, (m = 1 \sim 4, n = 5 \sim 8, j = n - 4) \end{aligned} \quad (5.15b)$$

$$f_{mn} = -E_g J_{v1} \int_{z_1}^{z_2} g_m'' g_j' dz + E_s (J_{v1} - J_{v2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_m'' g_j' dz, \quad (m=1 \sim 4, n=9 \sim 12, j=n-8) \quad (5.15c)$$

$$f_{mn} = f_{nm}, \quad (m=5 \sim 12, n=1 \sim 4) \quad (5.15d)$$

$$f_{mn} = E_f A_{f1} \int_{z_1}^{z_2} g_i' g_j' dz - E_f (A_{f1} - A_{f2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i' g_j' dz + \left\{ k_{d1} \int_{z_1}^{z_2} g_i g_j dz - (k_{d1} - k_{d2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i g_j dz \right\}, \quad (m, n=5 \sim 8, i=m-4, j=n-4) \quad (5.15e)$$

$$f_{mn} = -E_f A_{f1} \int_{z_1}^{z_2} g_i' g_j' dz + E_f (A_{f1} - A_{f2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i' g_j' dz, \quad (m=5 \sim 8, n=9 \sim 12, i=m-4, j=n-8) \quad (5.15f)$$

$$f_{mn} = f_{nm}, \quad (m=9 \sim 12, n=5 \sim 8) \quad (5.15g)$$

$$f_{mn} = E_g A_{v1} \int_{z_1}^{z_2} g_i' g_j' dz - E_g (A_{v1} - A_{v2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i' g_j' dz, \quad (m, n=9 \sim 12, i=m-8, j=n-8) \quad (5.15h)$$

また、節点力ベクトル $\bar{\mathbf{p}}$ を、

$$\bar{\mathbf{p}}^T = [\bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_3 \quad \bar{P}_4 \quad \bar{Q}_{d1} \quad \bar{Q}_{d2} \quad \bar{Q}_{d3} \quad \bar{Q}_{d4} \quad \bar{Q}_{v1} \quad \bar{Q}_{v2} \quad \bar{Q}_{v3} \quad \bar{Q}_{v4}] \quad (5.16)$$

と表すとき、

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_i &= \bar{S}_{vi} + p_{vy1} \int_{z_1}^{z_2} g_i dz - (p_{vy1} - p_{vy2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i dz \\ &+ p_{\zeta 1} \eta_d \int_{z_1}^{z_2} g_i' dz - (p_{\zeta 1} - p_{\zeta 2}) \eta_d \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i' dz + \int_{z_1}^{z_2} (M_{fp} - N_{fp} \eta_d) g_i'' dz \\ \bar{Q}_{di} &= \bar{N}_{di} + p_{\zeta 1} \int_{z_1}^{z_2} g_i dz - (p_{\zeta 1} - p_{\zeta 2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i dz + \int_{z_1}^{z_2} N_{fp} g_i' dz \\ \bar{Q}_{vi} &= \bar{N}_{vi} + p_{vz1} \int_{z_1}^{z_2} g_i dz - (p_{vz1} - p_{vz2}) \int_{z_1}^{z_2} \mu g_i dz - \int_{z_1}^{z_2} N_{fp} g_i' dz \end{aligned} \right\}, \quad (i=1 \sim 4) \quad (5.17)$$

である。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{v1} &= -\bar{S} \Big|_{z=z_1}, \quad \bar{S}_{v2} = \bar{M}_v \Big|_{z=z_1}, \quad \bar{S}_{v3} = \bar{S} \Big|_{z=z_2}, \quad \bar{S}_{v4} = -\bar{M}_v \Big|_{z=z_2} \\ \bar{N}_{d1} &= -\bar{N}_c \Big|_{z=z_1}, \quad \bar{N}_{d2} = 0, \quad \bar{N}_{d3} = \bar{N}_c \Big|_{z=z_2}, \quad \bar{N}_{d4} = 0 \\ \bar{N}_{v1} &= -\bar{N} \Big|_{z=z_1}, \quad \bar{N}_{v2} = 0, \quad \bar{N}_{v3} = \bar{N} \Big|_{z=z_2}, \quad \bar{N}_{v4} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

と表した。

6. 有限要素の剛性方程式の縮小

前章において有限要素のつり合い式として8つの等式を求めた。これらのつり合い式は、各節点に関するつり合い条件と変位の連続条件により結合され、境界条件(支点条件)の処理を行なって構造全体の剛性方程式が組立てられる。ただし、このうち式(5.16)に示す境界力が恒等的に零になる第6, 8, 10, 12番目の等式は、構造全体のつり合いとは無関係に、各有限要素内で独立に成立する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (f_{6,i} \bar{v}_i + f_{6,4+i} \bar{w}_{di} + f_{6,8+i} \bar{w}_{gi}) &= \bar{Q}_{d2} \\ \sum_{i=1}^4 (f_{8,i} \bar{v}_i + f_{8,4+i} \bar{w}_{di} + f_{8,8+i} \bar{w}_{gi}) &= \bar{Q}_{d4} \\ \sum_{i=1}^4 (f_{10,i} \bar{v}_i + f_{10,4+i} \bar{w}_{di} + f_{10,8+i} \bar{w}_{gi}) &= \bar{Q}_{g2} \\ \sum_{i=1}^4 (f_{12,i} \bar{v}_i + f_{12,4+i} \bar{w}_{di} + f_{12,8+i} \bar{w}_{gi}) &= \bar{Q}_{g4} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

の2式は各有限要素内で独立に成立するので、この条件を用いて事前に \bar{w}_{d2} と \bar{w}_{d4} および \bar{w}_{g2} と \bar{w}_{g4} を消去しておけば構造全体の剛性方程式を縮小できる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \bar{Q}_{d2} - \left(\sum_{i=1}^4 (f_{6,i} \bar{v}_i) + f_{65} \bar{w}_{d1} + f_{67} \bar{w}_{d3} + f_{69} \bar{w}_{g1} + f_{6,11} \bar{w}_{g3} \right) \\ a_2 &= \bar{Q}_{d4} - \left(\sum_{i=1}^4 (f_{8,i} \bar{v}_i) + f_{85} \bar{w}_{d1} + f_{87} \bar{w}_{d3} + f_{89} \bar{w}_{g1} + f_{8,11} \bar{w}_{g3} \right) \\ a_3 &= \bar{Q}_{s2} - \left(\sum_{i=1}^4 (f_{10,i} \bar{v}_i) + f_{10,5} \bar{w}_{d1} + f_{10,7} \bar{w}_{d3} + f_{10,9} \bar{w}_{g1} + f_{10,11} \bar{w}_{g3} \right) \\ a_4 &= \bar{Q}_{s4} - \left(\sum_{i=1}^4 (f_{12,i} \bar{v}_i) + f_{12,5} \bar{w}_{d1} + f_{12,7} \bar{w}_{d3} + f_{12,9} \bar{w}_{g1} + f_{12,11} \bar{w}_{g3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

と置くとき、

$$\begin{bmatrix} f_{6,6} & f_{6,8} & f_{6,10} & f_{6,12} \\ f_{8,6} & f_{8,8} & f_{8,10} & f_{8,12} \\ f_{10,6} & f_{10,8} & f_{10,10} & f_{10,12} \\ f_{12,6} & f_{12,8} & f_{12,10} & f_{12,12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_{d2} \\ \bar{w}_{d4} \\ \bar{w}_{g2} \\ \bar{w}_{g4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

である。したがって、

$$\begin{pmatrix} \bar{w}_{d2} \\ \bar{w}_{d4} \\ \bar{w}_{g2} \\ \bar{w}_{g4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_{6,6} & f_{6,8} & f_{6,10} & f_{6,12} \\ f_{8,6} & f_{8,8} & f_{8,10} & f_{8,12} \\ f_{10,6} & f_{10,8} & f_{10,10} & f_{10,12} \\ f_{12,6} & f_{12,8} & f_{12,10} & f_{12,12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

となる。上式を代入して式(5.11)から $\bar{w}_{d2}, \bar{w}_{d4}, \bar{w}_{s2}, \bar{w}_{s4}$ を消去すると、剛性マトリックスの各要素を具体的に表すことは省略するが、有限要素の剛性方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} f_{11}^* & f_{12}^* & f_{13}^* & f_{14}^* & f_{15}^* & f_{16}^* & f_{17}^* & f_{18}^* \\ f_{21}^* & f_{22}^* & f_{23}^* & f_{24}^* & f_{25}^* & f_{26}^* & f_{27}^* & f_{28}^* \\ f_{31}^* & f_{32}^* & f_{33}^* & f_{34}^* & f_{35}^* & f_{36}^* & f_{37}^* & f_{38}^* \\ f_{41}^* & f_{42}^* & f_{43}^* & f_{44}^* & f_{45}^* & f_{46}^* & f_{47}^* & f_{48}^* \\ f_{51}^* & f_{52}^* & f_{53}^* & f_{54}^* & f_{55}^* & f_{56}^* & f_{57}^* & f_{58}^* \\ f_{61}^* & f_{62}^* & f_{63}^* & f_{64}^* & f_{65}^* & f_{66}^* & f_{67}^* & f_{68}^* \\ f_{71}^* & f_{72}^* & f_{73}^* & f_{74}^* & f_{75}^* & f_{76}^* & f_{77}^* & f_{78}^* \\ f_{81}^* & f_{82}^* & f_{83}^* & f_{84}^* & f_{85}^* & f_{86}^* & f_{87}^* & f_{88}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{w}_{d1} \\ \bar{w}_{d3} \\ \bar{w}_{g1} \\ \bar{w}_{g3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_1^* \\ \bar{P}_2^* \\ \bar{P}_3^* \\ \bar{P}_4^* \\ \bar{Q}_{d1}^* \\ \bar{Q}_{d3}^* \\ \bar{Q}_{g1}^* \\ \bar{Q}_{g3}^* \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

この剛性方程式のうち破線で囲った部分を省略すれば，完全合成部材となる．

7. 床版と鋼桁の個々の断面力

以上の剛性方程式あるいは式(3.11)や(3.19)を解いて得られる断面力は式(3.15)や式(3.16)の $M_v (= n_z \bar{M}_v)$ や $\bar{N}_v (= n_z N_v)$ であり，床版と鋼桁の個々の曲げモーメント M_f と M_g や鋼桁の軸力 N_g は直接には求められない．それらは M_v および N_f と N_v を用いて次のように算定できる．

式(4.2)から変位を消去し，式(3.10a)の関係を用いると，

$$\left. \begin{aligned} N_g &= N_v - N_f \\ M_g &= \frac{1}{E_f I_{f0} + E_g I_{g0}} \left\{ -E_g I_{g0} e_f N_f + E_f I_{f0} e_g N_g + E_g I_{g0} (M_v + N_f \eta_d) \right\} \\ M_f &= M_v - M_g + N_f \eta_d \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

を得る．ここに，

$$\left. \begin{aligned} I_{f0} &= I_f - e_f J_f \\ I_{g0} &= I_g - e_g J_g \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

$$\left. \begin{aligned} e_f &= J_f / A_f \\ e_g &= J_g / A_g \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

である．

また剛性方程式の解としては，せん断力も，式(3.10d)あるいは(3.20a)に示す合成断面全体の値 $S_v (= n_z \bar{S}_v)$ が算定されるだけであり，床版と鋼桁の個々のせん断力 S_f, S_g は直接は求められない．これらは以下のように算定する．

図-4に示す床版と鋼桁の微小梁要素の回転のつり合いをとると，

$$\left. \begin{aligned} M_f - \left(M_f + \frac{\partial M_f}{\partial z} \Delta z \right) + \left(S_f + \frac{\partial S_f}{\partial z} \Delta z \right) \Delta z - (q_d \eta_{fl} + p_z \eta_p) \Delta z &= 0 \\ M_g - \left(M_g + \frac{\partial M_g}{\partial z} \Delta z \right) + \left(S_g + \frac{\partial S_g}{\partial z} \Delta z \right) \Delta z + q_d \Delta z \cdot y_{gu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

となり， Δz を極めて微小($\Delta z \Rightarrow dz$)にすれば，

$$\left. \begin{aligned} S_f &= M_f' + q_d \eta_{fl} + p_z \eta_p \\ S_g &= M_g' - q_d y_{gu} \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

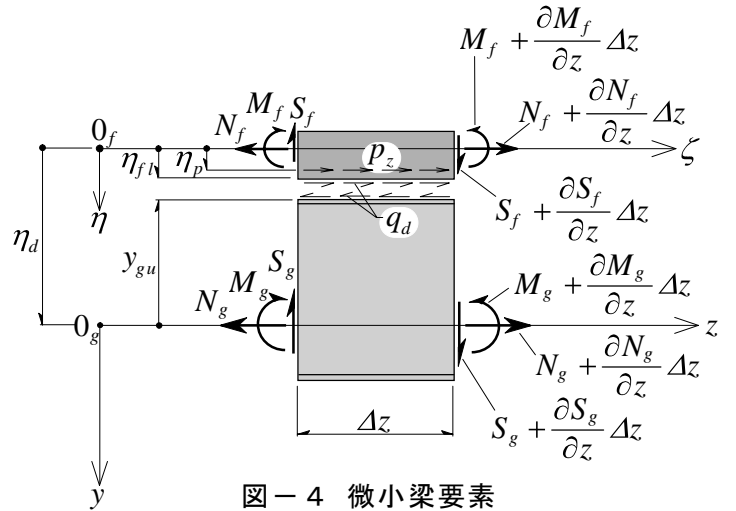


図-4 微小梁要素

を得る．また，水平方向の外力が作用していない図-4の微小要素の軸方向のつり合いをとることにより，

$$\left. \begin{aligned} N'_f &= -q_d - p_z \\ N'_g &= q_d \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

を得る．また，式(3.10)から，

$$M'_0 = M'_f + M'_g = S_g + S_g - q_d (\eta_{fl} - y_{gu}) - p_z \eta_p = S_v - q_d \eta_d - p_z \eta_p \quad (7.7)$$

となる．

式(7.5b)に式(7.1a)を代入し，式(7.6)と(7.7)の関係を用いると，床版と鋼桁のせん断力は，

$$S_g = \frac{E_g I_{g0} S_v - \left\{ E_f I_{f0} (y_{gu} - e_g) + E_g I_{g0} (\eta_{fl} - e_f) \right\} q_d - E_g I_{g0} (\eta_p - e_f) p_z}{E_f I_{f0} + E_g I_{g0}} - \left(\frac{E_g I_{g0} e_f}{E_f I_{f0} + E_g I_{g0}} \right)' N_f + \left(\frac{E_f I_{f0} e_g}{E_f I_{f0} + E_g I_{g0}} \right)' N_g + \left(\frac{E_g I_{g0}}{E_f I_{f0} + E_g I_{g0}} \right)' M_0 \quad (7.8a)$$

$$S_f = S_v - S_g \quad (7.8b)$$

と求まる．

8. クリープと乾燥収縮

ここではクリープと乾燥収縮に対する解析の基本式を扱う．コンクリート床版が合成された後，時刻 t_0 に後死荷重が作用して床版には $\sigma_f^{(0)}$ ，鋼桁には $\sigma_g^{(0)}$ なる応力が発生したとする．この状態からクリープや乾燥収縮が進行し，時刻 t において床版応力は $\sigma_f(t) = \sigma_f^{(0)} + \Delta\sigma_f(t)$ ，鋼桁の応力度は $\sigma_g(t) = \sigma_g^{(0)} + \Delta\sigma_g(t)$ になったとする．またこの間の乾燥収縮ひずみを $\Delta\varepsilon^{(s)}(t)$ と表すとき，床版に発生するひずみ $\Delta\varepsilon_c(t)$ ($t_0 \sim t$ 間のひずみの変化量)は，Trost の公式によると，

$$\Delta\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_f^{(0)}}{E_f} \phi_{t-t_0} + \frac{\Delta\sigma_f(t)}{E_f} (1 + \rho \phi_{t-t_0}) + \Delta\varepsilon^{(s)}(t) \quad (8.1)$$

と与えられる．ここに， ϕ_{t-t_0} は $\sigma_f^{(0)}$ が作用した t_0 時点から時刻 t までのクリープ係数であり， ρ は同様に時刻 $t_0 \sim t$ 間の材齢係数である．上式の右辺第1項は自由なクリープひずみ $\varepsilon_c^{(0)} \phi_{t-t_0}$ を，第2項はクリープ応力によるクリープひずみ $\Delta\varepsilon_c(t)$ を表す．すなわち，

$$\varepsilon_c^{(0)} \phi_{t-t_0} = \frac{\sigma_f^{(0)}}{E_f} \phi_{t-t_0} \quad , \quad \Delta\varepsilon_c(t) = \frac{\Delta\sigma_f(t)}{E_f} (1 + \rho \phi_{t-t_0}) \quad (8.2)$$

であり，前付きの Δ はクリープと乾燥収縮に伴う諸量の増分を表す．

式(8.2b)より，遅れ弾性ひずみに伴う床版の応力度 $\Delta\sigma_f$ は，

$$\Delta\sigma_f(t) = E_f^* \Delta\varepsilon_c(t) \quad (8.3)$$

$$E_f^* = E_{f,t-t_0}^* = \frac{E_f}{1 + \rho \phi_{t-t_0}} \quad (8.4)$$

と表せる．

この間の仮想仕事は，外力の増分はないものとするとき，

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{A_f} E_f^* \Delta\varepsilon_c \delta\varepsilon_c dA_f + \int_{A_g} \Delta\sigma_g \delta\varepsilon_z dA_g \right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \Delta q_d \delta\hat{w} dz \\ & - \left[n_z \left\{ \int_{A_f} \Delta\bar{\mathbf{p}}_f \cdot \delta\mathbf{u}_c dA_f + \int_{A_g} \Delta\bar{\mathbf{p}}_g \cdot \delta\mathbf{u}_g dA_g \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned}$$

となる． $\Delta\bar{\mathbf{p}}_f$ と $\Delta\bar{\mathbf{p}}_g$ はそれぞれクリープと乾燥収縮に伴う床版と主桁の両端断面の表面力の増分である．

上式に式(8.1)を代入すると，式(8.3)と(8.4)の関係により，

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \int_{A_f} \Delta\sigma_f \delta\varepsilon_c dA_f dz + \int_{z_1}^{z_2} \int_{A_g} \Delta\sigma_g \delta\varepsilon_z dA_g dz + \int_{z_1}^{z_2} \Delta q_d \delta\hat{w} dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \int_{A_f} \left\{ \sigma_f^{(0)} \phi_{t-t_0} \left(\frac{E_f^*}{E_f} \right) + E_f^* \Delta\varepsilon^{(s)} \right\} \delta\varepsilon_c dA_f dz \\ & - \left[n_z \left\{ \int_{A_f} \Delta\bar{\mathbf{p}}_f \cdot \delta\mathbf{u}_f dA_f + \int_{A_g} \Delta\bar{\mathbf{p}}_g \cdot \delta\mathbf{u}_g dA_g \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

さらに，式(3.6)と(3.7)の関係を用いると，

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \left\{ -(\Delta M_f + \Delta M_g) \delta v_0'' + \Delta N_f \delta w'_{f0} + \Delta N_g \delta w'_{g0} \right\} dz + \int_{z_1}^{z_2} \Delta q_d \delta\hat{w} dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \phi_{t-t_0} \left(\frac{E_f^*}{E_f} \right) \left\{ N_f^{(0)} \delta w'_{f0} - M_f^{(0)} \delta v_0'' \right\} dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \left(E_f^* A_f \Delta\varepsilon^{(s)} \delta w'_{f0} - E_f^* J_f \Delta\varepsilon^{(s)} \delta v_0'' \right) dz \end{aligned}$$

$$-\left[n_z \left\{ \Delta \bar{S}_v \delta v_0 - \Delta \bar{M}_v \delta v'_0 + \Delta \bar{N}_v \delta w_{g0} - \Delta \bar{N}_f \delta \hat{w} \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0$$

となり、これに式(3.13)を代入して、

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \left\{ -\Delta M_v \delta v_0'' + \Delta N_v \delta w'_{s0} - (\Delta N_f - \Delta q_d) \delta \hat{w} \right\} dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \phi_{t-t_0} \left(E_f^* / E_f \right) \left\{ -\left(M_f^{(0)} - N_f^{(0)} \eta_d \right) \delta v_0'' + N_f^{(0)} \delta w'_{g0} - N_f^{(0)} \delta \hat{w}' \right\} dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \left\{ -E_f^* \left(J_f - A_f \eta_d \right) \Delta \varepsilon^{(s)} \delta v_0'' + E_f^* A_f \Delta \varepsilon^{(s)} \delta w'_{g0} - E_f^* A_f \Delta \varepsilon^{(s)} \delta \hat{w}' \right\} dz \\ & - \left[n_z \left\{ \Delta \bar{S}_v \delta v_0 - \Delta \bar{M}_v \delta v'_0 + \Delta \bar{N}_v \delta w_{g0} - \Delta \bar{N}_f \delta \hat{w} \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

を得る.

床版の応力とひずみの関係は、式(4.1a)に対し、ここでは式(8.3)で与えられるので、式(4.2a, b)は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_f &= E_f^* A_f \Delta w'_{f0} - E_f^* J_f \Delta v_0'' = E_f^* A_f \left(w'_{g0} - \hat{w}' \right) - E_f^* \left(J_f - A_f \eta_d \right) v_0'' \\ \Delta M_f &= E_f^* J_f \Delta w'_{f0} - E_f^* I_f \Delta v_0'' = E_f^* J_f \left(w'_{g0} - \hat{w}' \right) - E_f^* \left(I_f - J_f \eta_d \right) v_0'' \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

となる. 鋼桁部およびジベルに関しては式(4.2c, d)と(4.4)がそのまま成り立ち、これらの関係を式(8.6)に代入すると、次式を得る.

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \left[-\left\{ E_g J_v \Delta w'_{g0} - E_g I_v \Delta v_0'' - E_f^* \left(J_f - A_f \eta_d \right) \Delta \hat{w}' \right\} \delta v_0'' \right. \\ & \quad + \left(E_g A_v w'_{g0} - E_g J_v v_0'' - E_f^* A_f \hat{w}' \right) \delta w'_{g0} \\ & \quad \left. - \left\{ E_f^* A_f \left(w'_{g0} - \hat{w}' \right) - E_f^* \left(J_f - A_f \eta_d \right) v_0'' - k_d \hat{w} \right\} \delta \hat{w}' \right] dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \phi_{t-t_0} \left(E_f^* / E_f \right) \left\{ -\left(M_f^{(0)} - N_f^{(0)} \eta_d \right) \delta v_0'' + N_f^{(0)} \delta w'_{g0} - N_f^{(0)} \delta \hat{w}' \right\} dz \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \left\{ -E_f^* \left(J_f - A_f \eta_d \right) \Delta \varepsilon^{(s)} \delta v_0'' + E_f^* A_f \Delta \varepsilon^{(s)} \delta w'_{g0} - E_f^* A_f \Delta \varepsilon^{(s)} \delta \hat{w}' \right\} dz \\ & - \left[n_z \left\{ \Delta \bar{S}_v \delta v_0 - \Delta \bar{M}_v \delta v'_0 + \Delta \bar{N}_v \delta w_{g0} - \Delta \bar{N}_f \delta \hat{w} \right\} \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

上式と式(5.2)を見比べれば判るように、上式から導かれる剛性係数は式(5.15)において $E_f \Rightarrow E_f^*$ と置き換えたものに等しい. また、式(5.16)の等価節点力は、式(5.17)に対して、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{P}_i &= \Delta \bar{S}_{vi} + \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \phi_{t-t_0} \left(E_f^* / E_f \right) \left(M_f^{(0)} - N_f^{(0)} \eta_d \right) \right\} g_i'' dz \\ & \quad + \int_{z_1}^{z_2} \left\{ E_f^* \left(J_f - A_f \eta_d \right) \Delta \varepsilon^{(s)} \right\} g_i'' dz \\ \Delta \bar{Q}_{di} &= \Delta \bar{N}_{di} + \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \phi_{t-t_0} \left(E_f^* / E_f \right) N_f^{(0)} + E_f^* A_f \Delta \varepsilon^{(s)} \right\} g_i' dz \\ \Delta \bar{Q}_{vi} &= \Delta \bar{N}_{vi} - \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \phi_{t-t_0} \left(E_f^* / E_f \right) N_f^{(0)} + E_f^* A_f \Delta \varepsilon^{(s)} \right\} g_i' dz \end{aligned} \right\} , (i=1 \sim 4) \quad (8.9)$$

となる.

9. おわりに

鋼合成桁も、PC合成桁も、我国で設計計算に用いている解析式は既に時代遅れになってしまっている。すなわち、

- 1) 我国では1940年代前後のクリープ理論がPC桁の設計に各種混在して用いられているが、欧米では既に遅れ弾性クリープを考慮した理論に切り替わっている¹⁾。
- 2) 鋼合成桁に関しては、昭和47年に“プレストレスしない合成桁”の条項が道路橋示方書Ⅱ(以下、道示と略称する)に取り込まれ、引張応力を受ける床版に関する鋼材規定が設けられたが、Eurocode 2²⁾(コンクリート構造物)、Eurocode 4³⁾(鋼・コンクリート合成構造物)およびDIN-Fachbericht 104⁴⁾(合成橋梁)ではコンクリートのひび割れ幅の照査規定に移行している。
- 3) DIN-Fachbericht 104では鋼連続合成桁の中間支点部のある範囲の床版コンクリートはひび割れるとして、死・活荷重、クリープ乾燥収縮および温度差応力の算定でその剛性低下を考慮している。これに対し道示ではコンクリートのひび割れによる剛性低下は考慮していない。

等である。

これらの問題を検討するために、合成桁の剛性方程式を誘導したのが本報告の始まりである。これをもとに、PC合成桁におけるクリープ理論の相違の影響を文献5)において検討した。また、鋼連続合成桁の中間支点部におけるひび割れ範囲とその影響に関しては文献6)にて検討した。

なお、本報告では床版はコンクリート単体、主桁は鋼桁単体として記述したが、上記の検討においては、別途検討資料¹⁾をもとに床版も主桁もコンクリートと鋼材の完全合成部材(ただし、鋼合成桁の主桁は鋼桁単体構造)で、床版と主桁間に弾性ジベルを挿入する不完全合成桁として扱った。何れも直線の本梁の計算である。

その後、市販の鋼合成桁の設計プログラムに幾つかの疑問や不満を感じたので、ジベルの変形を無視した完全合成桁に変換して立体格子構造(複合ラーメン橋を扱えるように合成桁の格子構造に橋脚を取り付けた構造)の設計計算プログラムを作成して実用に供している。

【参考文献】

- 1) 田中伸英・石澤俊希・高濱光夫・高龍・梶田順一・倉方慶夫：合成桁における分担断面力，新日本技研(株)・技術報告(ホームページで公開)，2011.6
- 2) Eurocode 2:Design of concrete structures Part 1.3 General rules,DD ENV 1992-1-3:1996
- 3) Eurocode 4:Design of composite steel and concrete structures—Part 2:Composite bridges, DD ENV 1994-2:2001
- 4) DIN-Fachbericht 104 Verbundbrücken, 2003
- 5) 徳力健・田中伸英・木村寛治：PC 連結合成桁設計におけるクリープ計算の影響，日本道路会議，平成 17 年 11 月
- 6) 中村太一・倉方慶夫・松田浩：連続鋼合成桁における中間支点部のコンクリート剛性の評価，第二回道路橋床版シンポジウム講演論文集，2000.10

補遺：変位関数の積分値

$$1) \quad \phi_{ij}^{(A)} = \int_0^\ell g_i'' g_j'' dz \quad , \quad \phi_{ij}^{(\mu A)} = \int_0^\ell \mu g_i'' g_j'' dz \quad , \quad (i, j=1 \sim 4)$$

$$\left[\phi_{ij}^{(A)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & -\frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ -\frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} \\ \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \quad , \quad \left[\phi_{ij}^{(\mu A)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^3} & \frac{2}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell^3} & \frac{4}{\ell^2} \\ \frac{2}{\ell^2} & \frac{1}{\ell} & -\frac{2}{\ell^2} & \frac{1}{\ell} \\ -\frac{6}{\ell^3} & -\frac{2}{\ell^2} & \frac{6}{\ell^3} & -\frac{4}{\ell^2} \\ \frac{4}{\ell^2} & \frac{1}{\ell} & -\frac{4}{\ell^2} & \frac{3}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \phi_{ij}^{(B)} = \int_0^\ell g_i g_j dz \quad , \quad \phi_{ij}^{(\mu B)} = \int_0^\ell \mu g_i g_j dz \quad , \quad (i, j=1 \sim 4)$$

$$\left[\phi_{ij}^{(B)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{13}{35} \ell & \frac{11}{210} \ell^2 & \frac{9}{70} \ell & -\frac{13}{420} \ell^2 \\ \frac{11}{210} \ell^2 & \frac{1}{105} \ell^3 & \frac{13}{420} \ell^2 & -\frac{1}{140} \ell^3 \\ \frac{9}{70} \ell & \frac{13}{420} \ell^2 & \frac{13}{35} \ell & -\frac{11}{210} \ell^2 \\ -\frac{13}{420} \ell^2 & -\frac{1}{140} \ell^3 & -\frac{11}{210} \ell^2 & \frac{1}{105} \ell^3 \end{bmatrix} \quad , \quad \left[\phi_{ij}^{(\mu B)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{3}{35} \ell & \frac{1}{60} \ell^2 & \frac{9}{140} \ell & -\frac{1}{70} \ell^2 \\ \frac{1}{60} \ell^2 & \frac{1}{280} \ell^3 & \frac{1}{60} \ell^2 & -\frac{1}{280} \ell^3 \\ \frac{9}{140} \ell & \frac{1}{60} \ell^2 & \frac{10}{35} \ell & -\frac{1}{28} \ell^2 \\ -\frac{1}{70} \ell^2 & -\frac{1}{280} \ell^3 & -\frac{1}{28} \ell^2 & \frac{1}{168} \ell^3 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad \phi_{ij}^{(C)} = \int_0^\ell g_i' g_j' dz \quad , \quad \phi_{ij}^{(\mu C)} = \int_0^\ell \mu g_i' g_j' dz \quad ,$$

$$\phi_{ij}^{(\mu^2 C)} = \int_0^\ell \mu^2 g_i' g_j' dz \quad , \quad \phi_{ij}^{(\mu^3 C)} = \int_0^\ell \mu^3 g_i' g_j' dz \quad , \quad (i, j=1 \sim 4)$$

$$\left[\phi_{ij}^{(C)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \ell & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \ell \\ -\frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \ell & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} \ell \end{bmatrix} \quad , \quad \left[\phi_{ij}^{(\mu C)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5\ell} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{5\ell} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{30} \ell & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{60} \ell \\ -\frac{3}{5\ell} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{60} \ell & 0 & \frac{1}{10} \ell \end{bmatrix}$$

$$\left[\phi_{ij}^{(\mu^2 C)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{12}{35\ell} & \frac{1}{14} & -\frac{12}{35\ell} & -\frac{1}{35} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{105} \ell & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{70} \ell \\ -\frac{12}{35\ell} & -\frac{1}{14} & \frac{12}{35\ell} & \frac{1}{35} \\ -\frac{1}{35} & -\frac{1}{70} \ell & \frac{1}{35} & \frac{3}{35} \ell \end{bmatrix} \quad , \quad \left[\phi_{ij}^{(\mu^3 C)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{3}{14\ell} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{14\ell} & -\frac{1}{28} \\ \frac{1}{20} & \frac{11}{840} \ell & -\frac{1}{20} & -\frac{11}{840} \ell \\ -\frac{3}{14\ell} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{14\ell} & \frac{1}{28} \\ -\frac{1}{28} & -\frac{11}{840} \ell & \frac{1}{28} & \frac{13}{168} \ell \end{bmatrix}$$

$$4) \quad \varphi_{ij}^{(D)} = \int_0^\ell g_i'' g_j' dz \quad , \quad \varphi_{ij}^{(\mu D)} = \int_0^\ell \mu g_i'' g_j' dz \quad , \quad (i, j=1 \sim 4)$$

$$[\phi_{ij}^{(D)}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ell} & 0 & \frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad [\phi_{ij}^{(\mu D)}] = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5\ell^2} & -\frac{3}{10\ell} & \frac{3}{5\ell^2} & \frac{7}{10\ell} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{7} \\ \frac{5\ell}{3} & \frac{15}{3} & -\frac{5\ell}{3} & \frac{15}{7} \\ -\frac{4}{5\ell} & -\frac{7}{30} & \frac{4}{5\ell} & \frac{13}{30} \end{bmatrix}$$

$$5) \quad \varphi_{ij}^{(E)} = \int_0^\ell g_i' g_j dz \quad , \quad \varphi_{ij}^{(\mu E)} = \int_0^\ell \mu g_i' g_j dz \quad , \quad (i, j=1 \sim 4)$$

$$[\phi_{ij}^{(E)}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\ell & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\ell \\ \frac{1}{10}\ell & 0 & -\frac{1}{10}\ell & \frac{1}{60}\ell^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\ell & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\ell \\ -\frac{1}{10}\ell & -\frac{1}{60}\ell^2 & \frac{1}{10}\ell & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad [\phi_{ij}^{(\mu E)}] = \begin{bmatrix} -\frac{13}{70} & -\frac{3}{70}\ell & -\frac{11}{35} & \frac{2}{35}\ell \\ -\frac{1}{105}\ell & -\frac{1}{210}\ell^2 & -\frac{31}{420}\ell & \frac{1}{84}\ell^2 \\ \frac{13}{70} & \frac{3}{70}\ell & \frac{11}{35} & -\frac{2}{35}\ell \\ -\frac{11}{420}\ell & -\frac{1}{210}\ell^2 & \frac{23}{210}\ell & -\frac{1}{210}\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$6) \quad \varphi_{ij}^{(F)} = \int_0^\ell g_i g_j'' dz \quad , \quad (i, j=1 \sim 4)$$

$$[\phi_{ij}^{(F)}] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5\ell} & -\frac{11}{10} & \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{15}\ell & \frac{1}{10} & \frac{1}{30}\ell \\ \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{30}\ell & \frac{1}{10} & -\frac{2}{15}\ell \end{bmatrix}$$

$$7) \quad \phi_j^{(G)} = \int_0^\ell g_j dz \quad , \quad \phi_j^{(\mu G)} = \int_0^\ell \mu g_j dz \quad , \quad (j=1 \sim 4)$$

$$\phi_j^{(H)} = \int_0^\ell g_j' dz \quad , \quad \phi_j^{(\mu H)} = \int_0^\ell \mu g_j' dz \quad , \quad (j=1 \sim 4)$$

$$\phi_j^{(I)} = \int_0^\ell g_j'' dz \quad , \quad \phi_j^{(\mu I)} = \int_0^\ell \mu g_j'' dz \quad , \quad (j=1 \sim 4)$$

$$[\phi_j^{(G)}] = \left[\frac{1}{2}\ell \quad \frac{1}{12}\ell^2 \quad \frac{1}{2}\ell \quad -\frac{1}{12}\ell^2 \right] \quad , \quad [\phi_j^{(\mu G)}] = \left[\frac{3}{20}\ell \quad \frac{1}{30}\ell^2 \quad \frac{7}{20}\ell \quad -\frac{1}{20}\ell^2 \right]$$

$$[\phi_j^{(H)}] = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad , \quad [\phi_j^{(\mu H)}] = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{12}\ell \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{12}\ell \right]$$

$$[\phi_j^{(I)}] = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \quad , \quad [\phi_j^{(\mu I)}] = \left[\frac{1}{\ell} \quad 0 \quad -\frac{1}{\ell} \quad 1 \right]$$